J. HOUBIGANT

Solution du problème proposé au concours général de 1844, pour la classe de mathématiques élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 5-8

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SOLUTION

du problème proposé au concours général de 1844, pour la classe de mathématiques élémentaires,

PAR J. HOUBIGANT (1[er] prix),
elève du College royal de Louis-le-Grand (Division de *M. Vieille*).

Par un point O (*fig.* 1), donné sur un diamètre AB, on mène à la circonférence une sécante OMM': démontrer qu'en joignant les points d'intersection M et M' avec le centre C, le produit

$$\operatorname{tang}\frac{\mathrm{MCA}}{2}\operatorname{tang}\frac{\mathrm{M'CA}}{2},$$

est constant pour toutes les sécantes menées du point O à la circonférence.

Si nous joignons MB, M'B, on sait que l'angle $\mathrm{MBA}=\frac{\mathrm{MCA}}{2}$, et l'angle $M'BA=\frac{\mathrm{M'CA}}{2}$. La question est ramenée à faire voir que le produit

$$\operatorname{tang}\mathrm{MBA}\operatorname{tang}\mathrm{M'BA}$$

est constant.

Joignons MA, M'A; dans les triangles rectangles BMA, BM'A, une proposition connue donne :

$$\text{tang MBA} = \frac{\text{AM}}{\text{BM}}, \quad \text{tang M'BA} = \frac{\text{AM}'}{\text{BM}'};$$

donc
$$\text{tang MBA tang M'BA} = \frac{\text{AM . AM}'}{\text{BM . BM}'}.$$

Les angles MAM', MBM' étant égaux, comme inscrits dans un même segment, les aires des triangles MAM', MBM', sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent ces angles ; donc

$$\frac{\text{AM.AM}'}{\text{BM.BM}'} = \frac{\text{AMM}'}{\text{BMM}'}.$$

Or les mêmes triangles ont une base commune MM', leurs aires sont aussi entre elles comme leurs hauteurs AP, BP'; donc $\frac{\text{AMM}'}{\text{BMM}'} = \frac{\text{AP}}{\text{BP}'}$, et par suite

$$\frac{\text{AM.AM}'}{\text{BM.BM}'} = \frac{\text{AP}}{\text{BP}'}.$$

Enfin, ce rapport $\frac{\text{AP}}{\text{BP}'}$ peut se changer en celui-ci $\frac{\text{OA}}{\text{OB}}$, à cause de la similitude des triangles OAP, OBP'. On a donc :

$$(1) \qquad \text{tang MBA tang M'BA} = \frac{\text{OA}}{\text{OB}},$$

rapport indépendant de la direction de la sécante, et qui, par conséquent, sera constant pour toute sécante menée du point O à la circonférence.

Discussion. L'égalité (1), vraie pour toute sécante, le sera encore à la limite, quand celle-ci deviendra tangente; alors les deux angles M'CA, MCA se confondent (*fig.* 2), et on a :

$$\overline{\text{tang}}^2\,\text{MBA} = \frac{\text{OA}}{\text{OB}};$$

il est facile de démontrer cette égalité directement.

Dans le triangle rectangle BMA on a :

$$\tang \mathrm{MBA} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}},$$

donc

$$\tang^2 \mathrm{MBA} = \frac{\overline{\mathrm{AM}}^2}{\overline{\mathrm{BM}}^2}.$$

Ces carrés étant dans le rapport de leurs projections AI et IB sur l'hypoténuse, on aura :

$$\tang^2 \mathrm{MBA} = \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}.$$

Mais le triangle rectangle CMO donne :

$$\mathrm{OC} : \mathrm{CM} :: \mathrm{CM} : \mathrm{CI},$$

proportion qui, d'après une propriété connue, devient :

$$\mathrm{OC} + \mathrm{CM} : \mathrm{OC} - \mathrm{CM} :: \mathrm{CM} + \mathrm{CI} : \mathrm{CM} - \mathrm{CI},$$

ou bien

$$\mathrm{OC} + \mathrm{CB} : \mathrm{OC} - \mathrm{CA} :: \mathrm{CB} + \mathrm{CI} : \mathrm{CA} - \mathrm{CI},$$

ou enfin

$$\mathrm{OB} : \mathrm{OA} :: \mathrm{IB} : \mathrm{AI},$$

donc

$$\tang^2 \mathrm{MBA} = \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}; \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque. Les points I et O, qui jouissent de la propriété que leurs distances respectives à deux autres points A et B sont dans le même rapport, ont reçu le nom de points conjugués harmoniques, et la ligne AB est dite divisée harmoniquement aux points I et O.

Un autre cas, limite, à examiner serait celui où la sécante se confond avec le diamètre ; mais alors l'un des angles devient nul, l'autre devient droit ; et le produit proposé prend la forme indéterminée $0 \times \infty$; on peut encore dire qu'il est égal à $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$.

Lorsque le point O au lieu d'être extérieur au cercle est intérieur (*fig* 3), l'égalité (1) est encore vraie. La démonstration est absolument la même que celle que nous avons donnée pour le cas du point extérieur, seulement pour passer du rapport $\frac{AM.AM'}{BM.BM'}$ à celui des aires $\frac{AMM'}{BMM'}$, on ne s'appuie pas sur ce que les angles MAM' et MBM' sont égaux, mais sur ce qu'ils sont supplémentaires ; dans ce cas le théorème qui a servi est encore vrai.

Dans le cas particulier où MM' est perpendiculaire au diamètre (*fig.* 4), les angles MBA, M'BA sont égaux, alors

$$\text{tang}\, MBA\, \text{tang}\, M'BA = \text{tang}^2 MBA = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{BM}^2} = \frac{OA}{OB}.$$

Enfin si le point O se confond avec le centre C (*fig.* 5), le rapport $\frac{OA}{OB}$ devient l'unité ; il faut que, pour toute direction de la sécante, le produit tang MBA tang M'BA $= 1$.

En effet, comme AM=BM', et AM'=BM, le rapport $\frac{AMM'}{BMM'}$, est évidemment l'unité, puisque le numérateur est égal au dénominateur.

Mais on peut dire plus simplement, que M'BA étant le complément de MBA, tang M'BA = cot MBA, donc

$$\text{tang}\, MBA\, \text{tang}\, M'BA = \text{tang}\, MBA\, \cot MBA,$$

et on sait que

$$\text{tang}\, MBA \cot MBA = 1.$$