Nouvelles annales de mathématiques

Théorème de Lexell et transformation des polygones sphériques, d'après M. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 587-590

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__587_1>

THÉORÈME DE LEXELL,

Et transformation des polygones sphériques, d'après M. Steiner.

(Journal de Crelle, t. II, p. 45. 1827.)

I. Théorème 1. **Dans tout quadrilatère sphérique inscrit dans un cercle, la somme de deux angles opposés est égale à la somme des deux autres angles.**

II. Théorème 2. Si deux triangles sphériques ont une base commune et sont inscrits dans le même cercle, la différence entre l'angle au sommet et la somme des angles à la base est la même dans les deux angles, et réciproquement si cette différence est la même pour deux triangles sphériques, ayant même base, ils sont inscrits dans le même cercle.

Observation. Le second théorème est un corollaire immédiat du premier dont la demonstration est facile.

III. Théorème 3. Le lieu des sommets des triangles sphériques équivalents et de même base, est une circonférence. Cette circonférence passe par les deux points diamétralement opposés aux extrémités de la base.

Démonstration. Soit ABC un triangle dont la base AB et l'aire sont données; soient A' et B' les points diamétralement opposes à A et à B; dans le triangle sphérique A'B'C, l'on a $A'=2^q-A$; $B'=2^q-B$; d'où l'on tire $A+B+C=4^q+C-A'-B'$; mais l'aire des triangles étant constante $A+B+C$ est constant, donc aussi $C-A'-B'$; et, d'après la réciproque du théorème précédent, le point C est sur une circonférence passant par les points A', B', c. q f. d.

Observation. La première partie de cette proposition est le théorème de Lexell (*Nova acta Petropolitana*, volume V, 1re partie); la seconde partie est de M. Steiner ainsi que toute la démonstration.

Corollaire. Si par les points B, B' on mène un demi grand cercle tangent au cercle CA'B', il est évident que l'aire du faisceau formé par ce demi-cercle et le demi-cercle BAB' est équivalente à l'aire du triangle ABC; soit β l'angle du fuseau; on a donc $2\beta=ABC-2^q$.

IV. *Problème.* Dans un triangle sphérique, on connait un cote, un angle adjacent et l'aire, construire le triangle.

Solution Soit ABC le triangle à construire; le côté AB et l'angle B sont donnés, ainsi que l'aire du triangle ABC ; on connaît donc $A + B + C$; avec l'angle B construisons le faisceau BAB'; le point cherché C est situé sur le demi-cercle BMB'; par BB' menons un autre demi-cercle BDB' faisant avec le demi-cercle BAB' un angle β égal à $\frac{1}{2}(A+B+C)-1^q$; par le point A' diamétralement opposé à A et par B', menons un petit cercle tangent au demi-cercle BDB'; ce petit cercle coupe le demi-cercle BMB' au point cherché C.

Corollaire I. On peut donc diviser un triangle sphérique en deux parties, dont les aires soient dans un rapport donné par un arc de grand cercle mené du sommet au côté opposé.

Corollaire II. On peut aussi construire un triangle sphérique connaissant un angle, un côté adjacent et le périmètre ; à l'aide du triangle polaire, on ramène ce problème au précédent.

Corollaire III. Le théorème de Lexell, rapporté au triangle polaire, donne cet autre théorème : Dans tout triangle sphérique qui a un angle constant et dont le périmètre est constant, l'enveloppe du côté opposé à l'angle constant est un petit cercle de la sphère.

Corollaire IV. Le théorème de Lexell peut servir à transformer un polygone sphérique en un triangle sphérique équivalent.

Observation. Lorsque la sphère devient un plan, le théorème de Lexell se réduit à cet énoncé élémentaire : Le sommet d'un triangle de base et d'aires constantes est une droite.

Mais le théorème du corollaire III se change en celui-ci : dans un triangle qui a un angle et un périmètre constants, l'enveloppe du côté opposé à l'angle est une hyperbole, si cet angle est aigu ; une parabole, si l'angle est droit ; une ellipse si l'angle est obtus; mais jamais un cercle. (Pour la démonstration voir *Annales*, t. III, p. 182.)

V. *Théorème de M. Steiner.* Les trois arcs de grand cercle qui partant des sommets d'un triangle sphérique le partagent en deux parties équivalentes, se coupent en un même point.

Démonstration. Soit ABC le triangle sphérique; A',B',C' les points diamétralement opposés à A,B,C; Aa,Bb,Cc, les trois arcs de grand cercle, bissecteurs d'aire.

D'après le théorème de Lexell, les quatre points A,B,b,a; de même les quatre points B',C',c,b et les quatre points A',C', c,a sont sur de petits cercles; les trois plans de ces petits cercles se rencontrent en un point O; donc les trois droites $A'a$,$B'b$,$C'c$ intersections de ces plans passent par le même point O; et les plans des trois arcs de grands cercles bissecteurs $A'aA$, $B'bB$, $C'cC$, passent encore par ce point O; mais ils se rencontrent aussi au centre de la sphère; par conséquent les plans des arcs bissecteurs ont deux points en commun, se coupent suivant la même droite, donc, etc...

Observation. La droite d'intersection des trois plans bissecteurs d'aire ne passe pas par le centre de gravité de l'aire du triangle.