V. O. LEBESGUE

Théorie des points associés dans l'ellipse et théorème de Fagnano

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 573-575

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__573_1>

THÉORIE

Des points associés dans l'ellipse et théorème de Fagnano ;

PAR M. V. O. LEBESGUE,
Professeur à la Faculté de Bordeaux.

—

I. Théorème. Dans chaque quadrant d'ellipse, on peut toujours trouver deux points tels que les normales qui passent par ces points sont à une même distance donnée du centre; deux points ainsi déterminés sont des *points associés*.

Démonstration. Soit $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ l'équation de l'ellipse; coordonnées rectangulaires; celle de la normale au point (x', y') est

$$y=\frac{a^2y'x}{b^2x'}-\frac{a^2e^2}{b^2}y'; \quad \text{ou} \quad a^2e^2=a^2-b^2;$$

on a donc pour la perpendiculaire p abaissée du centre sur cette normale,

$$v = e^2x\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-e^2x^2}};$$

d'où l'on déduit

$$e^4x^4-(a^2e^2+p^2)\,e^2x^2+a^2p^2=0\,; \qquad (1)$$

et $$2e^2x^2 = a^2e^2+p^2 \pm \sqrt{(a^2e^2+p^2)^2-4a^2p^2}.$$

La quantité sous le radical peut se mettre sous la forme

$$(a+b+p)\,(a-b+p)\,(a+b-p)\,(a-b-p)\,;$$

or $p<a$, donc les trois premiers facteurs, sont positifs; pour que le quatrième soit aussi positif, on doit avoir $p<a-b$; et dans ce cas, e^2x^2 a deux valeurs réelles et positives; donc x a deux valeurs réelles et de même signe. C. Q. F. D.

Corollaire. La plus grande valeur de p est $a-b$; et alors les deux points associés se confondent; et l'on a pour les coordonnés de ce point associé *double:*

$$x=a\sqrt{\frac{a}{a+b}}\,;\; y=b\sqrt{\frac{b}{a+b}}.$$

II. *Relation entre les abscisses des points associés.*

Soient x et ξ les abscisses de deux points associés; l'équation (1) donne :

$$x^2+\xi^2=\frac{a^2e^2+p^2}{e^2}\,;\; x^2\xi^2=\frac{a^2p^2}{e^4}\,;$$

éliminant p^2, il vient $a^4-a^2(x^2+\xi^2)+e^2x^2\xi^2=0\,(2)$, relation cherchée qui peut prendre cette forme

$$(a^2-x^2)\,(a^2-\xi^2)=(1-e^2)\,x^2\xi^2.$$

Corollaire I. A $x=0$ correspond $\xi=a$, donc les deux sommets sont des points associés; ce qui est évident à priori, puisque alors, pour les deux points, $p=0$.

Corollaire II. x augmentant, ξ diminue et *vice versâ.*

Corollaire III. En résolvant l'équation de relation, on trouve :

$$\frac{a}{x}=\sqrt{\frac{a^2-e^2\xi^2}{a^2-\xi^2}};\ \frac{a}{\xi}=\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}.$$

III. Théorème de Fagnano.

Différentiant l'équation de relation (2) et divisant par $ax\xi$, il vient

$$\frac{adx}{\xi}+\frac{ad\xi}{x}=\frac{e^2}{a}d(x\xi);$$

ou bien

$$dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}+d\xi\sqrt{\frac{a^2-e^2\xi^2}{a^2-\xi^2}}=\frac{e^2}{a}d(x\xi);$$

intégrant entre les limites x_0 et x auxquelles répondent ξ_0 et ξ, on aura :

$$\int_{x_0}^{x}dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}-\int_{\xi}^{\xi_0}d\xi\sqrt{\frac{a^2-e^2\xi^2}{a^2-\xi^2}}=\frac{e^2}{a}x\xi-\frac{e^2}{a}x_0\xi_0=p-p_0$$

la première intégrale est un arc d'ellipse qu'on peut désigner par $s=$arc (ξ,ξ_0) ; et la seconde intégrale est un arc d'ellipse qu'on peut désigner par $\sigma=$arc (ξ,ξ^0) ; donc arc (x_0, x)—arc $(\xi,\xi_0)=p-p_0$ (a) ; faisant $x=0$, l'équation (a) devient arc (o, x)—arc $(\xi, a)=p$; ce qui est précisément l'équation de Fagnano (V. Cauchy, *Appl. géom. du calc. infin.*, t. II, p. 24) ; l'équation (a) revient à l'équation (108) de l'ouvrage cité.