NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON ANNE

# Détermination des $n$ derniers chiffres de $\sqrt[m]{N}$ par une simple division

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 4 (1845), p. 561-564

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__561_0>

# DÉTERMINATION

*Des* n *derniers chiffres de* $\sqrt[m]{N}$ *par une simple division.*

PAR M. LÉON ANNE,
Ancien elève de l'Ecole polytechnique.

---

Quand on a obtenu $(n+\mu+1)$ chiffres de la racine $m^{ième}$ d'un nombre N, $n$ étant le nombre des chiffres qui restent à obtenir, et $\mu$ le nombre des chiffres du nombre $m$;

Si l'on divise le reste R auquel on est parvenu par $m$ fois la $(m-1)^{ième}$ puissance de la partie obtenue [cette $(m-1)^{ième}$ puissance étant, bien entendu, suivie de $(m-1)$ fois $n$ zéro] le quotient de cette division diffère de la partie qu'il reste à obtenir de moins d'une unité en plus ou en moins.

Soit $a$ la partie obtenue, $b$ celle qu'il reste à obtenir, $r$ la différence entre N et la plus grande $m^{ieme}$ puissance exacte contenue dans N et soit posé $a.\,10^n = A$, on a d'après l'énoncé :

$$N = (a\,.\,10^n + b)^m + r = (A + b)^m + r,$$

$$\frac{N - A^m}{mA^{m-1}} = b + \frac{m-1}{2}\cdot\frac{b^2}{A} + \ldots + \frac{b^m}{m\,.\,A^{m-1}} + \frac{r}{m\,.\,A^{m-1}},$$

$r$ peut être égal ou supérieur à $m(A+b)^{m-1}$ sans que $(A+b)$ cesse d'être le nombre le plus grand dont la $m^{ième}$ puissance peut se retrancher de N, ainsi le second membre de cette égalité peut être $b$ ou $(b+1)$. Comme il va être démontré qu'il est toujours inférieur à $(b+2)$, et comme l'on ne prend que la partie entière du quotient $\dfrac{N - A^m}{m\,.\,A^{m-1}}$ pour complément de la partie obtenue, il s'ensuit que cette méthode donne

$(A+b)$ ou $(A+b+1)$ pour $\sqrt[m]{N}$, c'est-à-dire le nombre entier immédiatement supérieur ou immédiatement inférieur à $\sqrt[m]{N}$. N étant au plus égal à $(A+b+1)^m-1$, il suffit pour établir le théorème de prouver que

$$\frac{(A+b+1)^m-1-A^m}{m\,.\,A^{m-1}}<b+2,$$

ou

$$(A+b+1)^m<A^m+m\,.\,A^{m-1}(b+1)+m\,.\,A^{m-1}+1\,;$$

supprimant $A^m+m\,.\,A^{m-1}(b+1)$ dans les deux membres, et les divisant ensuite tous les deux par $A^m$ et enfin posant $(b+1)=B$, on a :

$$\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{B}{A}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{B}{A}\right)^3+\ldots+\left(\frac{B}{A}\right)^m<\frac{m}{A}+\frac{1}{A^m}$$

cette inégalité sera à fortiori vérifiée si elle existe en remplaçant chaque coefficient du premier membre par un coefficient plus grand, et si en même temps l'on diminue le second membre de $\frac{1}{A^m}$; car les inégalités $M<N$, $N<P$, $P<Q$ donnent évidemment $M<Q$; or

$$\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{B}{A}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{B}{A}\right)^3+\ldots\ldots<\left(\frac{mB}{A}\right)^2+\left(\frac{mB}{A}\right)^3+\ldots,$$

donc l'inégalité précédente sera à fortiori vérifiée si l'on a :

$$\left(\frac{mB}{A}\right)^2+\left(\frac{mB}{A}\right)^3+\ldots\ldots+\left(\frac{mB}{A}\right)^m<\frac{m}{A}\,;$$

le produit de deux facteurs a autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs réunis ou un de moins ; $b$ ayant $n$ chiffres, $B=(b+1)$ en a $n$ ou $(n+1)$, donc $mB$ en a au plus $(\mu+n+1)$, et comme A en a $(2n+\mu+1)$, il s'ensuit que $\left(\frac{mB}{A}\right)$ est une fraction proprement dite [son numérateur ayant moins de chiffres que son dénominateur] et l'on peut mettre l'inégalité précédente sous la forme :

$$\frac{\left(\frac{mB}{A}\right)^2-\left(\frac{mB}{A}\right)^{m+1}}{1-\left(\frac{mB}{A}\right)}<\frac{m}{A},$$

ou

$$\frac{m^2B^2}{A^2}+\frac{m^2B}{A^2}-\left(\frac{mB}{A}\right)^{m+1}<\frac{m}{A},$$

ou, multipliant les deux membres par $\frac{A^2}{m}$,

$$m(B^2+B)-\frac{A^2}{m}\left(\frac{mB}{A}\right)^{m+1}<A;$$

si B a $n$ chiffres, sa plus grande valeur est $(10^n-1)$, et dans cette hypothèse

$$B^2+B=B(B+1)=(10^n-1)10^n,$$

c'est-à-dire, est un nombre formé de $n$ chiffres 9 à la suite desquels sont écrits $n$ zéro, au total $2n$ chiffres; donc $(B^2+B)$ ne peut avoir plus de $2n$ chiffres, et par suite $m(B^2+B)$ ne peut en avoir plus de $(\mu+2n)$; ainsi $m(B^2+B)$ ayant au moins un chiffre de moins que A, l'inégalité précédente est vérifiée.

Dans le cas où $B=(b+1)$ aurait $(n+1)$ chiffres, on aurait au plus $B=10^n$, alors

$$mB^2+mB=m\,.\,10^{2n}+m\,.\,10^n;$$

cette somme ne peut avoir au plus que $(2n+\mu+1)$ chiffres, c'est-à-dire autant que A, à moins que l'indice $m$ de la racine ne soit un nombre formé de plus de $n$ chiffres 9 ($n$ est le nombre de chiffres qui restent à obtenir). Ce cas est donc le seul qui puisse offrir quelque incertitude, mais alors il est facile de la lever en calculant un chiffre de plus, c'est-à-dire $(n+\mu+2)$ au lieu de $(n+\mu+1)$.

*Remarque.* Dans l'extraction d'une racine dont l'indice est inférieur à 10, c'est-à-dire dont l'indice n'a qu'un chiffre, il faut, d'après ce qui précède, que la partie obtenue ait au moins deux chiffres de plus que la partie qui reste à obtenir pour pouvoir achever l'opération par une simple division; cependant cette condition se simplifie pour la racine carrée, car il suffit que la partie obtenue ait un seul chiffre de plus que la partie restant à obtenir.

Pour le prouver, prenons le cas le plus défavorable :

$$N = (10^n . a + b)^2 + 2(10^n . a + b),$$
$$N = 10^{2n} . a^2 + 2 . 10^n . a . b + b^2 + 2 . 10^n . a + 2b,$$
$$\frac{N - 10^{2n} . a^2}{2 . 10^n . a} = b + 1 + \frac{b^2 + 2b}{2 . 10^n . a};$$

la plus grande valeur de $b$ est $(10^n - 1)$ nombre formé de $n$ chiffres 9, dans cette hypothèse

$$\left. \begin{array}{l} b^2 = 10^{2n} - 2 . 10^n + 1 \\ 2b = 2 . 10^n - 2 \end{array} \right\} b^2 + 2b = 10^{m} - 1;$$

ainsi le numérateur de la fraction $\frac{b^2 + 2b}{2 . 10^n . a}$ est alors un nombre formé de $2n$ chiffres 9, et comme le dénominateur a $(2n+1)$ ou $(2n+2)$ chiffres, il s'ensuit que cette fraction est plus petite que l'unité, donc le quotient de la division $\frac{N - 10^{2n} . a^2}{2 . 10^n . a}$ est $b$ ou $(b + 1)$, c'est-à-dire que cette méthode donne ou $(10^n . a + b)$ ou $(10^n . a + b + 1)$ pour $\sqrt{N}$; donc enfin l'on trouve le nombre entier immédiatement inférieur ou immédiatement supérieur à $\sqrt{N}$.