NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Question d'examen sur les coniques à coefficients variables et principalement sur les coniques biconfocales

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 557-560

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__557_1>

QUESTION D'EXAMEN

sur les coniques à coefficients variables et principalement sur les coniques biconfocales.

(V. p. 520.)

I. Problème. Dans une équation à six termes d'une conique, on suppose que tous les coefficients sont des fonctions *connues* d'une même variable ; à chacune de ces coniques, on mène une tangente ayant une direction *donnée*; trouver le lieu géométrique du point de contact.

Solution. Soit une équation du second degré à six termes : $y + rx + s = 0$, l'équation de la tangente où r est *connu*.

Soit z la variable dont tous les coefficients de l'équation sont des fonctions connues ; la relation de tangence donne :

$$l' - 2rn + lr^2 + ms^2 + 2k's + 2krs = 0 \quad \text{(t. II, p. 108)}.$$

l', n, l, m, k', k sont aussi des fonctions connues de z. Remplaçant s par $-(y + rx)$, il vient :

$$l' - 2rn + lr^2 + m(y + rx)^2 - 2(y + rx)(k' + 2kr) = 0. \quad (1)$$

Éliminant z entre cette équation et celle à six termes, on obtient une équation en x et y, qui est celle du lieu cherché.

Observation. La même solution subsiste évidemment lorsque cinq coefficients sont fonctions du sixième, ou lorsqu'un certain nombre de coefficients étant connus, il existe des relations entre les coefficients restants, etc.

II. *Applications.* 1° A *est variable et les cinq autres coefficients sont donnés.*

Alors l', n, k' sont connus ; remplaçant l, m, k par leurs valeurs, savoir : $l = D^2 - 4AF$, $m = B^2 - 4AC$, $n = 2AE - BD$, l'équation (1) se compose de termes ne renfermant pas A, et d'autres comprenant A au premier degré. Remplaçant A par sa valeur $-\dfrac{Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F}{y^2}$, l'équation (1) devient :

$$y^2[l' - 2nr + D^2r^2 + B^2(y + rx)^2 - 2(y + rx)(k' - 2BD)]$$
$$+ 4(Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F)[C(y + rx)^2 + 2Er(y + rx) + Fr^2] = 0,$$

équation du quatrième degré qui représente généralement une ligne à branches infinies. Les termes du quatrième degré sont $(y + rx)^2(By + 2Cx)^2$; de même quand C est seul variable.

2° F *est variable et les cinq autres coefficients sont donnés ;* le lieu est une conique.

3° B seul est variable ; le lieu est du sixième degré

4° D ou E seulement variable ; lieu du quatrième degré.

III. Théorème. Une conique ayant un centre et un foyer fixe et touchant une droite donnée de direction, le lieu du point de contact est une hyperbole équilatère concentrique à la conique et passant par les foyers de l'ellipse.

Démonstration. Ellipse. Soit $(b^2+c^2)y^2+b^2x^2=b^2(b^2+c^2)$; l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes principaux ; $2b$ est le petit axe et c l'excentricité ; b est variable et c est constant. On a ici :

$$m=-4b^2(b^2+c^2)\ ;\ l=+4b^2(b^2+c^2)^2\ ;\ l'=4b^4(b^2+c^2)\ ;$$
$$k=k'=n=0.$$

Substituant ces valeurs dans (1), divisant par $4b^2(b^2+c^2)$, et résolvant par rapport à r, il vient $r=\dfrac{b^2x}{(b^2+c^2)y}$, expression qu'on pourrait trouver directement, d'après l'équation connue de la tangente. Donc, $b^2=\dfrac{rc^2y}{x-ry}$; substituant dans l'équation de l'ellipse, on a $ry^2-rx^2+xy(r^2-1)+rc^2=0$, hyperbole équilatère concentrique à l'ellipse.

On y satisfait en posant $x=c$, $y=0$.

Dans cette équation $m=(r^2+1)^2$; $\mathrm{L}=rc^2(r^2+1)^2$; ainsi le demi-grand axe $=c\sqrt{\dfrac{2r}{r^2+1}}$ (*Voir* t. I, p. 493) ; l'excentricité $=2c\sqrt{\dfrac{r}{r^2+1}}$; et les équations des axes principaux sont :

$$y(r+1)+x(r-1)=0,\quad y(r-1)-x(r+1)=0.$$

(*Voir* t. I, p. 496.)

Lorsque $r=1$, les axes principaux sont ceux de l'ellipse, et les sommets sont les foyers de l'ellipse. L'équation de l'hyperbole équilatère étant indépendante de b^2, il s'ensuit qu'elle reste la même lorsqu'on remplace l'ellipse par une hyperbole.

Observation. Le théorème est de M. Fregier (Corresp. sur l'École polyt., t. III, p. 17, 1814); mais il n'est énoncé que pour l'ellipse. Tm.