NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorèmes sur les coniques circonscrites à un quadrilatère ou inscrites ; de même à un triangle ; théorème de M. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 541-545

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__541_0>

THÉORÈMES

Sur les coniques circonscrites à un quadrilatère ou inscrites; de même à un triangle; théorème de M. Steiner.

(Suite, v. p. 491.)

L. (*Fig.* 51). A′ désignant l'aire de l'ellipse circonscrite au triangle ABC, on a

$$A'^2=\frac{4L^2}{m^3}\sin^2\gamma\pi^2=\frac{4u^2t^2(pu+qt-pq)^2}{(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)}.\sin^2\gamma.\pi^2$$

(t. IX, p. 265); soient α,β,γ, les perpendiculaires abaissées du point (t,u) sur les trois côtes B′C′, A′C′, A′B′ du triangle A′B′C′ et α',β',γ', les trois perpendiculaires abaissées du même point sur les trois côtés, BC, AC, AB du triangle ABC.

On a

$$(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)=\frac{16\alpha\beta\gamma R}{\sin^2\gamma}\text{ (p. 490)};$$

or, $\beta'=t\sin\gamma$, $\gamma'=u\sin\gamma$, et $p\gamma'+q\beta'+r\alpha'=pq\sin\gamma$, ou r est la longueur du côté BC; d'où

$$\alpha'=\frac{(pq-pu-qt)\sin\gamma}{r},\text{ et } r=2R\sin\gamma;$$

substituant les valeurs dans A'^2, on obtient

$$A'^2=\frac{\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2}{\alpha\beta\gamma}.R.\pi^2;$$

expression élégante qu'on doit à M. Steiner.

Corollaire I. On a $AA'=2\pi^2R\alpha'\beta'\gamma'$; désignons par A_1, A_1', les aires des ellipses inscrites et circonscrites au triangle A′B′C′

et ayant toujours même centre (t,u). R devient $\frac{R}{2}$, et α',β',γ' se changent en α,β,γ ; donc

$$4A_1A_1' = 4\pi^2R\alpha\beta\gamma = A^2.$$

Corollaire II. Par les sommets A, B, C, concevons des droites respectivement parallèles aux côtés BC, AC, AB du triangle ABC ; on aura un nouveau triangle DEF, dans lequel, si nous inscrivons du même centre (t,u) une ellipse dont l'aire soit A_2, on aura, d'après le corollaire précédent

$$A_2^2 = 4AA' ;$$

mais d'après le théorème d'Euler, lorsqu'un triangle est à la fois inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique, il y a une infinité d'autres triangles à chacun desquels, les mêmes coniques sont, l'une inscrite et l'autre circonscrite ; à chacun de ces triangles correspond un triangle DEF ; ainsi les ellipses inscrites dans ces derniers triangles et du même centre ont toutes la même aire.

Ces deux beaux corollaires sont aussi de M. Steiner.

LI. (*Fig.* 51.) Théorème. Parmi toutes les coniques inscrites dans un triangle ABC et ayant leurs centres sur une droite donnée, il y en a deux dont le produit des axes principaux est un maximum. Le point I de moyenne distance des centres E et E' de ces deux coniques est le même que le centre de moyenne distance des trois points d'intersection de la droite fixe avec les trois côtés A'B', B'C', C'A' du triangle A'B'C', passant par les milieux A', B', C' des côtés BC, AC, AB ; désignant ces trois points respectivement par c,a,b, on a

$$IE^2 = IE'^2 = \frac{1}{6}(Ia^2 + Ib^2 + Ic^2).$$

Démonstration. Le lieu du centre d'une conique inscrite au triangle ABC et dont le produit des axes principaux est donné, est représenté par l'équation

$$(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)=c \quad \text{(v. p. 491)}; \quad (1)$$

les t,u se comptent sur les côtés AB, AC de sorte que

$$2u-q=0,\ 2t-p=0,\ 2pu+2qt-pq=0$$

sont les équations des côtés A'C', A'B', B'C' du triangle A'B'C'; faisons $p=2p'$, $q=2q'$, et changeant de coordonnées, on a en général

$$t=a+bx+cy,\quad u=a'+b'x+c'y;$$

prenant la droite fixe sur laquelle se trouvent les centres E et E', pour axe des x, et pour origine le point a, où cette droite coupe le côté B'C'; soient x',x'' les abscisses des points b',c' d'intersection de cette même droite avec les côtés A'C', A'B', de sorte qu'on a

$$p'a'+q'a-p'q'=0 \ (2);$$

les équations des côtés A'C', A'B' deviennent

$$a'+b'x+c'y-q'=0,\quad a+bx+cy-p'=0;$$

faisant $y=0$, on a

$$x'=\frac{q'-a'}{b'},\quad x''=\frac{p'-a}{b};\ \text{et de là}\ x'x''=\frac{aa'}{bb'}.$$

Substituant dans l'équation (1), à la place de u et t leurs valeurs, on a l'équation du lieu rapporté aux nouveaux axes; le premier membre de la nouvelle équation doit devenir un maximum lorsque $y=0$; il suffit de substituer $a+bx$ pour t et $a'+b'x$ pour u, et on obtient pour ce premier membre :

$$(a'+b'x-q')(a+bx-p')[x(b'p'+bq')+p'a'+q'a-p'q'],$$

il suffit donc de rendre au maximum le produit

$$\begin{aligned} x(a+bx-p')(a'+b'x-q') &= \\ = bb'x^3-x^2[b(q'-a')+b'(p'-a)]+aa'x &= \\ = bb'[x^3-x^2(x'+x'')+xx'x''&; \end{aligned}$$

pour que ce produit soit au maximum l'on doit avoir :

$$3x^2-2x(x'+x'')+x'x''=0;$$

d'où

$$x = \frac{1}{3}(x' + x'') \pm \frac{1}{3}\sqrt{x'^2 - x'x'' + x''^2}.$$

Telles sont les abscisses cherchées des centres E et E'; le point I, milieu de EE' a pour abscisse $\frac{1}{3}(x' + x'')$, qui est aussi le point de moyenne distance des trois points a,b,c; on a

$$\mathrm{IE}^2 = \mathrm{IE}'^2 = \frac{1}{9}(x'^2 - x'x'' + x''^2);$$

or

$$\mathrm{I}a = \frac{1}{3}(x' + x''), \quad \mathrm{I}b = \mathrm{I}a - x';$$

donc

$$\mathrm{I}b = \frac{1}{3}(x'' - 2x'), \quad \text{de même } \mathrm{I}c = \frac{1}{3}(x' - 2x'');$$

donc

$$\mathrm{IE}^2 = \frac{1}{6}(\mathrm{I}a^2 + \mathrm{I}b^2 + \mathrm{I}c^2). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Observation. Supposons que le centre parcoure la droite fixe dans la direction abc et qu'il vienne de l'infini; à ce point de départ, la conique est une parabole et le produit des axes principaux est infini; tant que le centre reste dans le triangle formé par les prolongements de A'B', A'C', la conique est une hyperbole, et le produit des axes va sans cesse en diminuant; parvenu en a sur B'C', le produit est nul; pénétrant dans l'intérieur du triangle, la conique devient une ellipse; arrivé en b sur A'C', ce produit est derechef nul; ainsi entre a et b, il y a un produit maximum, répondant à une ellipse; tant que le centre reste dans l'angle formé par C'A' et le prolongement de B'A', la conique est une hyperbole et en c sur A'B' le produit est une troisième fois nul; donc entre b et c il y a un produit maximum répondant à une hyperbole; le centre entrant dans l'angle opposé à C'A'B', la conique devient et reste constamment une ellipse; le produit des axes va sans cesse croissant, et à l'infini, l'ellipse devenant une parabole, le produit des axes est encore infini.

Faisant

$$x' + x'' = z\,,\quad x'x'' = v^2\,,\quad \frac{bb'}{4\,.\,27}(b'p' + bq') = d\,;$$

on aura pour le produit des carrés des demi-axes principaux, correspondant au maximum, l'expression

$$d\left[zv^2 - 2z^3 \pm (z^2 - 3v^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

LII. Théorème. Parmi toutes les coniques inscrites à un quadrilatère, il y en a deux dont le produit des axes principaux est un maximum ; les centres sont sur la droite qui joint les milieux des diagonales et leurs positions sont déterminées par le théorème précédent.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème de Newton sur les coniques inscrites aux quadrilatères et du théorème précedent.

Observation. Ce théorème important qui donne la solution d'un problème qui a résisté aux efforts d'un Euler et d'un Gauss est une des plus belles inventions de M. Steiner, qui a énoncé le théorème précédent, sans démonstration.

Corollaire. Dans le quadrilatère, on peut choisir trois côtés quelconques ; il y a donc quatre moyens de construction qui doivent amener au même résultat ; ce qui donne de nouvelles propriétés géométriques du quadrilatère. Nous remarquerons, par occasion, que le théorème de Newton donne cette belle propriété du pentagone. Si l'on en supprime un côté quelconque, il reste un quadrilatère ; qu'on mène la transversale, passant par les milieux des diagonales du quadrilatère ; les cinq transversales qu'on obtient de cette manière passent par le même point, qui n'est autre que le centre de la conique inscrite au pentagone. Nous recommandons, comme utile exercice, de démontrer cette propriété, directement. Tm.