NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorèmes posthumes d'Abel

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 536-540
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__536_0>

THÉORÈMES POSTHUMES D'ABEL.

(Crelle, t. V, p. 336.)

—

1.

Si une équation du cinquième degré, dont les coefficients sont des nombres rationnels, est résoluble algébriquement, ses racines peuvent être mises sous la forme suivante :

$$x = c + \mathrm{A} a^{\frac{1}{5}} a_1^{\frac{2}{5}} a_2^{\frac{3}{5}} a_3^{\frac{4}{5}} + \mathrm{A}_1 . a_1^{\frac{1}{5}} a_2^{\frac{2}{5}} a_3^{\frac{3}{5}} a^{\frac{4}{5}} +$$

$$+ \mathrm{A}_2 . a_2^{\frac{1}{5}} a_3^{\frac{2}{5}} a^{\frac{3}{5}} a_1^{\frac{4}{5}} + \mathrm{A}_3 . a_3^{\frac{1}{5}} a^{\frac{2}{5}} a_1^{\frac{3}{5}} a_2^{\frac{4}{5}},$$

$$a = m + n(1+e^2)^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\left[1 + e^2 + (1+e^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$a_1 = m - n(1+e^2)^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\left[1 + e^2 - (1+e^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$a_2 = m + n(1+e^2)^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\left[1 + e^2 + (1+e^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$a_3 = m - n(1+e^2)^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\left[1 + e^2 + (1+e^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{A} = k + k'a + k''a_2 + k'''aa_2; \quad \mathrm{A}_1 = k + k'a_1 + k''a_3 + k'''a_1a_3,$$

$$\mathrm{A}_2 = k + k'a_2 + k''a + k'''a_2a; \quad \mathrm{A}_3 = k + k'a_3 + k''a_1 + k'''a_1a_3.$$

Les quantités c, b, e, m, n, k, k', k'', k''' sont des nombres rationnels.

Toutefois l'équation $x^5 + ax + b = 0$ ne peut se résoudre de cette manière, lorsque a et b sont des quantités quelconques.

« J'ai des théorèmes analogues pour les équations des 7e, 11e, 13e, etc. degrés. » Freyberg (dans le Hartz), 14 mars 1826 (traduit de l'allemand)

II.

Soient $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ des quantités inconnues quelconques et $\varphi(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ une fonction entière de ces quantités du degré m, m étant un nombre premier quelconque : si l'on suppose entre $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ les n équations suivantes :

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = 0\,;\quad \varphi(x_2, x_3 \ldots\ldots x_n, x_1) = 0\,,$$

$$\varphi(x_3, x_4 \ldots\ldots x_n, x_1, x_2) = 0\,;\quad \varphi(x_n, x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n-1}) = 0\,,$$

on en pourra généralement éliminer $n-1$ quantités, et une quelconque x sera déterminée à l'aide d'une équation du degré m^n. Il est clair que le premier membre de cette équation sera divisible par $\varphi(x, x, x \ldots\ldots x)$ qui est du degré m. On aura donc une équation en x du degré $m^n - m$.

Cela posé, je dis que cette équation sera décomposable en $\dfrac{m^n - m}{n}$ équations, chacune du degré n et dont les coefficients seront déterminés à l'aide d'une équation du degré $\dfrac{m^n - m}{n}$. En supposant connues les racines de cette équation, les équations du degré n seront résolubles algébriquement.

Par exemple, si l'on suppose $n = 2$, $m = 3$, on aura une équation en x du degré $3^2 - 3 = 6$. Cette équation du sixième degré sera résoluble algébriquement, car, en vertu du théorème, on pourra la décomposer en trois équations du second degré.

Pareillement, si l'on cherche les valeurs inégales de x_1, x_2, x_3 propres à satisfaire aux équations

$$x_2 = \frac{a + bx_1 + cx_1^2}{\alpha + \beta x_1}\,;\quad x_3 = \frac{a + bx_2 + cx_2'}{\alpha + \beta x_2}\,;\quad x_1 = \frac{a + bx_3 + cx_3^2}{\alpha + \beta x_3}\,,$$

on aura, pour déterminer x_1, x_2, x_3 une équation du sixième degré, mais décomposable en deux équations du troisième degré, les coefficients de ces équations étant déterminés par une équation du second degré.

III.

Si trois racines d'une équation quelconque irréductible, dont le degré est un nombre premier, sont liées entre elles de sorte que l'une de ces racines peut être exprimée *rationnellement* par les deux autres, l'équation en question sera toujours résoluble à l'aide de *radicaux*.

IV.

Si deux racines d'une équation irréductible, dont le degré est un nombre premier, ont entre elles un rapport tel, qu'on peut exprimer une des deux racines rationnellement par l'autre, cette équation sera toujours résoluble à l'aide de *radicaux*.

(Les trois derniers théorèmes sont en français et datés de Christiania, le 18 octobre 1828.)

V.

Une propriété générale de toutes les fonctions dont la *différentielle* est *algébrique* consiste en ce que la somme d'un nombre *quelconque* de ces fonctions peut s'exprimer par un nombre *déterminé* des mêmes fonctions, savoir :

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \ldots\ldots + \varphi(x_\mu) =$$
$$= v - [\varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \varphi(z_3) + \ldots\ldots + \varphi(z_n)].$$

x_1, x_2 ..... x_n sont des quantités quelconques; z_1, z_2, z_n sont des fonctions algébriques de ces quantités, et v est une fonction algébro-logarithmique; n est un nombre déterminé dépendant de μ; par exemple, si φ est une fonction algébrique, alors, comme l'on sait, $n = 1$. (*Voir* Legendre, Théorie des fonctions elliptiques.)

Mais lorsque la fonction n'est pas elliptique, on n'en connaît aucune propriété.

Je transcris le cas suivant, comme un des plus remarquables :

$$\text{Si } \varphi x = \int \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{(a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{alors} \quad \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) = C - [\varphi(y_1) + \varphi(y_2)], \quad (1)$$

où x_1, x_2, x_3 sont trois grandeurs variables arbitraires, C une constante, et y_1, y_2 les deux racines de l'équation :

$$y^2 - \left(\frac{c_2^2 + 2c_1 - a_4}{2c_2 - a_5} - x_1 - x_2 - x_3\right) y + \frac{\left(\frac{c^2 - a}{x_1 x_2 x_3}\right)}{2c_2 - a_5} = 0.$$

Les quantités c, c_1, c_2 sont déterminées par ces trois équations linéaires :

$$c + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + x_1^3 = (a + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots .\, a_6 x_1^6)^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient les deux autres équations en changeant successivement x_1 en x_2 et en x_3.

Toute la théorie de la fonction $\varphi(x)$ est donnée par l'équation (1), parce qu'on peut démontrer que la propriété qu'elle exprime détermine complétement cette fonction. (Paris, le 9 août 1826) (traduit de l'allemand).

VI.

Lorsqu'on construit la courbe AMBN dont l'équation est $z = \sqrt{\cos 2\varphi}$ ou $z = \mathrm{AM}$ et $\varphi = \angle \mathrm{MAB}$, alors l'arc AM de cette courbe est donné par l'expression suivante : $s = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$, et dépend ainsi des fonctions elliptiques.

J'ai trouvé qu'on peut toujours diviser le périmètre de la courbe géométriquement (par la règle et le compas) en n parties égales, lorsque n est un nombre premier de la forme $2^m + 1$ ou lorsqu'on a :

$$n = 2^p (2^m + 1)(2^{m'} + 1)(2^{m''} + 1) \ldots\ldots \left(2^{m^{(k)}} + 1\right)$$

ou $$2^m + 1,\ 2^{m'} + 1 \text{ etc.}$$

sont des nombres premiers.

Ce théorème est le même que celui de Gauss pour le cercle. J'ai été amené à ce théorème par ma théorie des équations combinée avec la théorie des nombres. J'ai lieu de croire que Gauss y est aussi parvenu.

Paris, 4 décembre 1826 (traduit de l'allemand).

Note. Il s'agit ici de la lemniscate de Bernoulli ; l'hyperbole équilatère est, parmi les hyperboles, ce que le cercle est parmi les ellipses ; la circonférence est une lemniscate à elle-même ; de sorte que les deux lemniscates, circulaire et hyperbolique, jouissent de la même propriété. Il serait fort intéressant de connaître les propriétés de lemniscates provenant des courbes données par l'équation $y^m \pm x^m = a^m$. M. Serret, dans un mémoire extrêmement remarquable, en généralisant une certaine propriété, non encore signalée, de la lemniscate, vient de trouver une foule de courbes algébriques, dont la multisection peut s'opérer *algébriquement*. (Liouville, X, p. 257, 1845.) Tm.

VII.

J'ai trouvé la somme de la série suivante :

$$\sin\varphi \cdot \frac{a}{a+1} + \sin 3\varphi \frac{a^3}{1+a^3} + \sin 5\varphi \frac{a^5}{1+a^5} + \ldots$$

(a et φ sont des quantités réelles quelconques) et d'autres séries analogues. On peut l'exprimer en fonctions elliptiques.

Christiania, 15 novembre 1827 (en allemand).

Il y a encore plusieurs théorèmes très-intéressants sur les fonctions elliptiques, en français ; mais tous ces théorèmes sont malheureusement énoncés sans démonstration.