Nouvelles annales de mathématiques

Sur une certaine décomposition d'expressions fractionnaires contenant plusieurs variables, d'après M. Jacobi

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 533-535

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__533_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR UNE CERTAINE DÉCOMPOSITION

d'expressions fractionnaires contenant plusieurs variables.

D'après M. Jacobi. (Crelle, t. V, p. 344. 1830)

Nous allons donner une idée succincte de cet exercice algébrique (*exercitatio algebraica*) que l'illustre analyste a écrit en latin.

I. Soit $\frac{ab'-a'b}{(ax+by)(b'y+a'x)}$ une fraction algébrique ; qu'on développe $\frac{ab'-a'b}{ax+by}$ suivant les puissances décroissantes de a ou, ce qui revient au même, de x ; et ensuite $\frac{1}{b'y+a'x}$ suivant les puissances décroissantes de b' ou de y, et qu'on multiplie les deux produits, on obtient trois sortes de termes : 1° les exposants de x et de y sont négatifs simultanément ; 2° l'exposant de x est négatif et celui de y positif ; 3° celui de x est positif et celui de y négatif. Il n'y a aucun terme où x et y soient positifs simultanément : or, on peut décomposer cette fraction en trois autres telles que chacune, étant développée de la même manière que la fraction proposée, donne respectivement les trois sortes de termes et avec des coefficients finis ; de sorte qu'on obtient ainsi la sommation de séries infinies. En effet, l'on a les identités :

$$\frac{ab'-a'b}{(ax+by)(b'y+a'x)}=\frac{a}{y}\cdot\frac{1}{ax+by}-\frac{a'}{y}\cdot\frac{1}{b'y+a'x},$$

$$\frac{a}{y}\cdot\frac{1}{ax+by}=\frac{1}{xy}-\frac{1}{x}\cdot\frac{b}{ax+by}; \qquad (1)$$

d'où

$$\frac{ab'-a'b}{(ax+by)(b'y+a'x)}=\frac{1}{xy}-\frac{1}{x}\cdot\frac{b}{ax+by}-\frac{1}{y}\cdot\frac{a'}{b'y+a'x}.$$

Ce sont là les trois fractions ; désignant la première par L, la seconde par L_1, et la troisième par L_2, si on développe chacune suivant les puissances décroissantes de a et b', L donne les termes de la première espèce, L_1 de la seconde, et L_2 de la troisième espèce.

II. Soit $\frac{ab'-a'b}{(ax+by-t)(b'y+a'x-t')}$ ou t et t' sont des constantes.

Soient p et q les valeurs de x et y, qui annulent les facteurs du dénominateur ; de sorte qu'on a :

$$p = \frac{b't - bt'}{ab' - a'b}; \quad q = \frac{at' - a't}{ab' - a'b};$$

remplaçant x et y dans les trois fractions, par $x - p$ et $y - q$, il vient :

$$L = \frac{ab' - a'b}{(ab' - a'b)\,x - b't + bt'} \cdot \frac{ab' - a'b}{(a'b - ab')\,y - at' + a't},$$

$$L_1 = - \frac{ab' - a'b}{(ab' - a'b)\,x - b't + bt'} \cdot \frac{b}{ax + by - t},$$

$$L_2 = - \frac{ab' - a'b}{(ab' - a'b)\,y - at' + a't} \cdot \frac{a'}{b'y + a'x - t'};$$

et $$\frac{ab' - a'b}{(ax + by - t)(b'y + a'x - t')} = L + L_1 + L_2. \qquad (2)$$

Développant l'équation (2) d'après les puissances décroissantes de a et b', le premier membre donne les trois sortes de termes avec des coefficients en séries infinies ; le second membre donne, savoir · 1° L les termes où les exposants de x et y sont négatifs ; 2° L_1 ceux où x a un exposant négatif et y positif ; 3° L_2 ceux où l'exposant de x est positif et celui de y negatif, et avec des coefficients en nombre fini de termes.

L'auteur étend ces théorèmes à un nombre quelconque de facteurs linéaires élevés à des puissances quelconques, et s'appuie sur les propriétés de la *déterminante*, nom qu'on a donné à la fonction cramérienne ou au dénominateur des inconnues dans les équations du premier degré, qui occupe une place si importante dans toutes les branches de l'analyse, et qu'en France aucun élève, même parmi les plus forts, ne sait former : on ne l'enseigne pas. Les fonctions génératrices de Laplace mènent aussi aux résultats obtenus dans ce mémoire, si digne, comme tout ce qui vient de cette source, d'être bien médité.