TERQUEM

Propriété du quadrilatère situé dans le plan d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 530-533

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__530_1>

PROPRIETÉ DU QUADRILATÈRE

situé dans le plan d'une conique.

I. *Définition.* Un triangle étant situé dans le plan d'une conique, les trois droites conjuguées aux trois côtés et passant respectivement par les sommets opposés, se rencontrent en un même point (*Voir* p. 432). Dans ce qui suit, nous désignons ce point sous le nom de *point de rencontre.*

II. THÉORÈME. Un quadrilatère étant tracé dans le plan d'une conique, si on prolonge suffisamment les côtés opposés, on obtient quatre triangles. Dans chaque triangle, il y a un *point de rencontre.* Les quatre points de rencontre sont sur une même droite.

Démonstration. Soit BCC'B' le quadrilatère; A le point d'intersection des côtés opposés BB', CC'. Prenons ABB' pour axe des x et ACC′ pour axe des y. Soit $AB = a$; $AB' = a'$; $AC = b$; $AC' = b'$; l'équation de la conique est à six termes.

Dans le triangle ABC, l'on a :

$2Ay + Bx = aB$ (1), conjugué de AC passant par B,
$By + 2Cx = bB$ (2), ——— de AB ——— C.

Dans le triangle AB′C′, l'on a :

$2Ay + Bx = a'B$ (3), conjugué de AC′ passant par B′,
$By + 2Cx = b'B$ (4), ——— de AB′ ——— C′.

Soit M le point d'intersection des côtés opposés BC, B′C′ ; on trouve, d'après l'équation (5) (t. I, p. 495), dans le triangle BMB′ :

$$b(2Ay + Bx) - a(By + 2Cx) = ba'B - 2aa'C \quad (A),$$

équation de la droite conjuguée à BM et passant par B′;

$$b'(2Ay + Bx) - a'(By + 2Cx) = b'aB - 2aa'C \quad (B),$$

équation de la droite conjuguée à B′M et passant par B ; d'où l'on tire :

$$2Ay + Bx = \frac{B(ba'^2 - b'a^2) + 2aa'C(a - a')}{a'b - ab'}, \quad (5)$$

$$By + 2Cx = \frac{Bbb'(a' - a) + 2aa'C(b - b')}{a'b - ab'}. \quad (6)$$

Les droites (1), (3), (5) sont parallèles ; de même les droites (2), (4), (6).

Désignant par $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ les quantités toutes connues dans les six équations ; pour que les trois points d'intersection des droites (1) et (2), (3) et (4), (5) et (6) soient sur une même droite, on doit avoir la relation :

$$f_2f_3 + f_1f_6 + f_4f_5 = f_3f_6 + f_2f_5 + f_1f_4$$ (*Voir* p. 463) ;

or cette relation existe, et les trois points d'intersection sont les trois *points de rencontre* des triangles BAC, B′AC′, BMB′ ;

donc ces trois points sont en ligne droite; donc aussi les quatre *points de rencontre* des quatre triangles BAC, B'AC', BMB', CMC' sont en ligne droite. C. Q. F. D.

Corollaire. Lorsque la conique est un cercle, le *point de rencontre* est le point de rencontre des trois hauteurs du triangle. On a ainsi la solution de la question 101 (p. 370), telle qu'elle a été proposée, pour ce cas particulier, par M. Heinen (Crelle, t. III, p. 285, 1828). Ce ne sont là que des vérifications, en attendant une démonstration directe.

III. On peut parvenir aux mêmes résultats d'une manière plus simple, sans recourir à l'équation de condition de la page 463. Soient x', y' les coordonnées du point d'intersection de (1) et de (2) ; x'', y'' les coordonnées du point d'intersection de (3) et (4) ; on obtient :

$$x' = \frac{B(bB - 2aC)}{m}; \qquad y' = \frac{B(aB - 2bA)}{m};$$

$$x'' = \frac{B(b'B - 2a'C)}{m}; \qquad y'' = \frac{B(a'B - 2b'A)}{m}.$$

La droite qui passe par ces deux points a pour équation :

$$(a-a')(By+2Cx)+(b-b')(2Ay+Bx) = B(ab'-a'b). \quad (7)$$

On parvient à cette même équation en soustrayant membre à membre l'équation (A) de (B). Ainsi l'intersection de (A) et (B) est sur la droite donnée par l'équation (7). C. Q. F. D.

IV. Pour que la droite *des rencontres* devienne un diamètre de la conique, il faut que l'équation (7) soit satisfaite par $x = \frac{k}{m}$; $y = \frac{k'}{m}$; donc on a pour condition :

$$(a'-a)E + (b'-b)D = B(ab'-a'b).$$

V. $ab' - a'b = a(b'-b) - b(a'-a)$; ainsi les points B et C restant fixes, si C' et B' se meuvent de manière que le rapport $\frac{b'-b}{a'-a} = \frac{CC'}{BB'}$, reste constant, la droite des points de rencontre reste fixe. On sait qu'alors l'enveloppe de la droite mobile B'C' est une parabole (t. III, p. 183).

VI. Construisant les parallélogrammes CABA', C'AB'A'', la droite qui passe par les sommets A', A'' a pour équation :

$$y(a-a')+x(b'-b)=ab'-a'b\ ;$$

les intersections de cette droite avec les axes donnent les valeurs de $\dfrac{a'b-ab'}{a'-a}$ et de $\dfrac{a'b-ab'}{b'-b}$.

VII. Si la conique est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes, alors $A=C=0$, et l'équation de la droite des points de rencontre devient :

$$y(a-a')+x(b-b')=ab'-a'b.$$

VIII. Si les axes sont conjugués, $B=0$; dans ce cas, la droite de rencontre passe par l'origine ; elle y passe encore lorsque BC est parallèle à B'C' et que le quadrilatère devient un trapèze ; car on a $ab'-a'b=0$.

IX. Il existe une démonstration géométrique du théorème, fondée sur les propriétés de l'hexagone à côtés opposés parallèles. (Crelle, t. V, p. 163, 1830, par Aubert.) Tm.