GUILMIN

Note sur la trigonométrie. Questions d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 52-55

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__52_1>

NOTE SUR LA TRIGONOMÉTRIE.

Questions d'examen.

PAR M. GUILMIN,
Ancien elève de l'Ecole normale, professeur de mathematiques.

Quand on cherche le cosinus de $\frac{a}{n}$, connaissant $\cos a$, on est conduit à résoudre une équation du n^{eme} degré, qui manque du deuxième terme, ce qui annonce que la somme des racines de l'équation est nulle ; on propose de vérifier cette circonstance par la trigonométrie.

Soient x_1, x_2, x_3,... x_n, les racines en question ; on sait que les arcs auxquels correspondent ces cosinus sont

$$\frac{a}{n},\ \frac{a}{n}+\frac{2\pi}{n},\ \frac{a}{n}+\frac{4\pi}{n},\ldots,\ \frac{a}{n}+\frac{(2n-2)\pi}{n};$$

ils forment une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$. Par suite, d'après la formule de Thomas Simpson, nous avons entre leurs cosinus, les relations qui suivent :

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} x_3 &= 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x_2 - x_1,\\ x_4 &= 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x_3 - x_2,\\ x_5 &= 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x_4 - x_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n &= 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x_{n-1} - x_{n-2}. \end{aligned}\right.$$

Si on continue la progression, après l'arc $\frac{a}{n}+\frac{(2n-2)\pi}{n}$, viendra l'arc $\frac{a}{n}+\frac{2n\pi}{n}=\frac{a}{n}+2\pi$, dont le cosinus est le même que celui de $\frac{a}{n}$ désigné par x_1. L'arc qui suivra encore sera $\frac{a}{n}+2\pi+\frac{2\pi}{n}$, dont le cosinus est égal à celui de $\frac{a}{n}+\frac{2\pi}{n}$, désigné par x_2. D'après ces remarques nous pouvons encore écrire les deux égalités :

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\left(\frac{a}{n}+\frac{2n\pi}{n}\right) \quad \text{ou} \quad x_1 = 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x_n - x_{n-1}.\\ &\cos\left(\frac{a}{n}+2\pi+\frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{ou} \quad x_2 = 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x_1 - x_n. \end{aligned}\right.$$

Ajoutant toutes les égalités (α) et (β) membres à membres, nous aurons en appelant s la somme des cosinus considérés :

$$s = 2\cos\frac{2\pi}{n}\,s - s,$$

ou

$$2s = 2\cos\frac{2\pi}{n}\,s,$$

ou enfin

$$2s\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right) = 0.$$

Or $\cos\frac{2\pi}{n}$ ne peut être égal à 1 ; il faudrait pour cela que n fût égal à 1, donc $s = 0$. Ce qu'il fallait prouver.

Quand on cherche $\sin\frac{a}{n}$, connaissant $\sin a$, on arrive quand n est impair à une équation du degré n, et quand n est pair à une équation du degré $2n$; l'une et l'autre de ces équations sont privées du deuxième terme : on propose aussi de vérifier cette circonstance par la trigonométrie.

D'après une discussion connue, les arcs auxquels appartiennent les sinus dont les valeurs sont les racines de l'équation, sont dans le premier cas les mêmes que ceux indiqués dans le cas du cosinus, savoir :

$$\frac{a}{n},\quad \frac{a}{n}+\frac{2\pi}{n}\ \ldots\ \frac{a}{n}+\frac{(2n-2)\pi}{n}.$$

La démonstration précédente peut se répéter telle qu'elle est en changeant le mot de cosinus en sinus, quand on parle des racines de l'équation, puisque la formule de Thomas Simpson s'applique également aux sinus et aux cosinus ; ce qui se conçoit d'ailleurs parfaitement, puisque si des arcs forment une progression arithmétique, leurs compléments doivent évidemment en former une autre.

Dans le deuxième cas, nous avons pour correspondre aux racines de l'équation du degré $2n$, deux séries d'arcs formant deux progressions arithmétiques, savoir :

$$\frac{a}{n}+\frac{2\pi}{n},\quad \frac{a}{n}+\frac{4\pi}{n}\ \ldots\ \frac{a}{n}+\frac{(2n-2)\pi}{n};$$

$$\frac{\pi}{n}-\frac{a}{n},\quad \frac{3\pi}{n}-\frac{a}{n}\ \ldots\ \frac{(2n-1)\pi}{n}-\frac{a}{n}.$$

Appelons $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, les sinus des premiers ; y_1, $y_2, y_3, \ldots y_n$, les sinus des seconds. La démonstration précédente prouve que $x_1 + x_2 + \ldots x_n = 0$, et $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots$

$+y'_n = 0$. Donc la somme de tous ces sinus réunis est égale à 0.

Cette démonstration prouve en général que si n arcs quelconques, forment une progression arithmétique dont le premier terme est *quelconque*, et la raison $\frac{2\pi}{n}$, la somme des sinus, ou la somme des cosinus de ces arcs est nulle.

Ceci peut être regardé comme une vérification de ce théorème : la somme des projections des côtés d'un polygone regulier sur un diamètre quelconque du cercle circonscrit est égale à 0.

(*La suite au prochain numéro*).