NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Note sur l'équation aux quotients des racines

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 516-518

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__516_1>

NOTE

sur l'équation aux quotients des racines.

I. Soient $a_1, a_2, a_3 \ldots a_m$ les m racines d'une équation du degré m. Désignons par S les sommes des puissances des racines, relatives à cette équation ; et par s les sommes analogues pour les racines de l'équation aux quotients ; on a évidemment :

$$s_p = \frac{S_p}{a_1^{\,p}} + \frac{S_p}{a_2^{\,p}} + \ldots\ldots \frac{S_p}{a_m^{\,p}} - m\,;$$

d'où l'on tire :

$$s_p = S_p S_{-p} - m. \qquad (1)$$

Coroll. 1. Faisant $p = 0$, on a $s_0 = m^2 - m = m(m-1)$; en effet, l'équation aux quotients est du degré $m(m-1)$.

Coroll. 2. $s_{-p} = S_{-p}S_p - m$, donc $s_{-p} = s_p$; ce qui doit être, puisque l'équation aux quotients est une équation réciproque; elle peut donc se ramener à une équation du degré $\frac{m(m-1)}{1.2}$. Il suffit de calculer $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_{\frac{m(m-1)}{1.2}}$; au moyen de ces valeurs, on trouvera, par les formules connues, les coefficients de l'équation aux quotients.

Coroll. 3. Si tous les coefficients de l'équation sont des nombres entiers, et si les coefficients du premier terme, ainsi que le terme tout connu, sont chacun égal à l'unité, alors S_p et S_{-p} sont des nombres entiers. Par conséquent, s_p est aussi un nombre entier; et les racines ne sauraient être commensurables, à moins d'être égales à l'unité.

Coroll. 4. Si l'équation donnée est réciproque, on a $S_p = S_{-p}$; donc, dans ce cas, $s_p = S_p^2 - m$.

II. Soit une seconde équation quelconque en y du degré n; faisons $z = xy$, et éliminant x et y entre les trois équations, il vient une équation en z du degré mn, ayant pour racines les produits qu'on obtient, en multipliant chacune des m racines de la première équation en x, par chacun des n racines de l'équation en y; si on prend pour équation en y la réciproque de l'équation donnée, alors l'équation en z du degré m^2 renferme les racines de l'équation aux quotients et en outre m racines égales à l'unité; divisant donc le polynôme en z par $(z-1)^m$, on obtient encore l'équation aux quotients.

III. Si l'équation donnée a p racines égales, l'équation aux quotients aura $p(p-1)$ racines égales à l'unité. Donc cette équation peut faire découvrir le nombre des racines égales.

IV. 1[er] exemple :

$$A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0,$$

$$A_0A_2x^2 + (2A_0A_2 - A_1^2)\,x + A_0A_2 = 0.$$ Éq. aux quotients.

ou bien :

$$A_0A_2(x+1)^2 = A_1^2x.$$

2[e] exemple :

$$x^3 + A_2x + A_3 = 0,$$

$$(a_1,\ a_2,\ a_3).$$

L'équation aux quotients étant réciproque, se réduit à une équation du troisième degré ; représentons par z l'inconnue de cette dernière équation, nous aurons :

$$z = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2a_1}\right)^2 - 2 = \frac{a_3^2}{a_2a_1} - 2\,;$$

faisant $z + 2 = a$, les trois racines seront :

$$\frac{a_1^2}{a_2a_3},\quad \frac{a_2^2}{a_1a_3},\quad \frac{a_3^2}{a_1a_2},$$

ou, ce qui revient au même :

$$\frac{-a_1^3}{A_3},\quad \frac{-a_2^3}{A_3},\quad \frac{-a_3^3}{A_3}\,;$$

donc, faisant $A_3u = -v$, les racines de l'équation en v sont les cubes des racines de l'équation donnée ; on trouve facilement :

$$v^3 + 3A_3v^2 + (A_2^3 + 3A_3)\,v + A_3^3 = 0 \quad \text{ou} \quad (v + A_3)^3 + A_2^3v = 0.$$

Remplaçant v par $-A_3(z+2)$, on obtient,

$$A_3^2(1 - z)^3 + A_2^3(z + 2) = 0.$$

Tm.