EUGÈNE JUBÉ

Question d'analyse proposée au concours d'agrégation de l'année 1845

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 510-516

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__510_1>

QUESTION D'ANALYSE

proposée au concours d'agrégation de l'année 1845.

PAR M. JUBÉ (EUGÈNE),
Licencié ès-sciences physiques et mathématiques, agrégé.

—

Déterminer sur la surface d'un cône droit la courbe qui coupe les génératrices sous un angle constant, et qui passe par deux points donnés de cette surface. Calculer la longueur d'un arc de cette courbe et la portion de surface conique comprise entre cet arc et les génératrices qui passent par ses extrémités. Trouver le plan osculateur, le rayon et le centre de courbure pour un point quelconque de la courbe, et le lieu des centres de courbure. Chercher ce que devient la courbe quand on développe la surface sur un plan.

Prenons pour origine le sommet du cône, son axe pour celui des z et nommons α l'angle constant que fait la génératrice avec l'axe. Le cône aura pour équation

$$z^2 \operatorname{tang}^2 \alpha = x^2 + y^2.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, elles devront satisfaire à l'équation

$$(A) \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{dx}{ds} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{dy}{ds} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{dz}{ds} = m,$$

qui exprime que la tangente en ce point fait avec la génératrice qui la rencontre un angle dont le cosinus est m ; et d'après la condition donnée, m est une constante.

L'équation du cône donne par la différentiation

$$zdz \operatorname{tang}^2 \alpha = xdx + ydy,$$

d'où l'équation (A) donne en ayant égard à celle du cône,

$$(B) \qquad \frac{dz}{ds} = m \cos \alpha,$$

$$(C) \qquad \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = m \sin \alpha ds.$$

Or, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, et à cause de (B),

$$dx^2 + dy^2 = ds^2(1 - m^2 \cos^2 \alpha).$$

Mais $dx^2 + dy^2 = d\sigma^2$, σ étant l'arc de la projection sur le plan xy, donc $d\sigma = \sqrt{1 - m^2 \cos^2 \alpha} . ds$, et $\sigma = \sqrt{1 - m^2 \cos^2 \alpha} . s$, σ et s commençant ensemble. L'équation (C) donnera donc

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{m \sin \alpha}{\sqrt{1 - m^2 \cos^2 \alpha}} d\sigma,$$

et en faisant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \operatorname{arc tang} \frac{y}{x}$, on obtient

$dr = \frac{m \sin \alpha}{\sqrt{1 - m^2 \cos^2 \alpha}} d\sigma$, d'où $r = Ce^{N\theta}$, N étant $\frac{m \sin \alpha}{\sqrt{1 - m^2}}$ et C une constante.

La courbe demandée a donc pour projection sur le plan xy une spirale logarithmique qu'on peut représenter par l'équation

$$\mathrm{L}.\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{L}.\mathrm{C}+\mathrm{N}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}.$$

Cette équation jointe à celle du cône détermine complétement la courbe. La constante C se calcule par la condition que la courbe passe par deux points donnés. Si a,b, et a',b', sont les coordonnées de ces points par rapport aux axes des x et des y, et que n soit le nombre des spires aussi donné que la courbe doit faire pour passer du premier point au second, on aura pour determiner C et N et par suite m, les deux équations

$$\mathrm{L}\sqrt{a^2+b^2}=\mathrm{LC}+\mathrm{N}\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a},$$

$$\mathrm{L}\sqrt{a'^2+b'^2}=\mathrm{LC}+\mathrm{N}\left(2n\pi+\operatorname{arc\,tang}\frac{b'}{a'}\right).$$

Si les deux points sont sur un plan parallèle à celui de la base du cône, on aura $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a'^2+b'^2}$ puisque les ordonnées en z seront les mêmes et par suite

$$\mathrm{N}\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\quad 2n\pi-\operatorname{arc\,tang}\frac{b'}{a'}\right]=0,$$

d'où $\mathrm{N}=0$ et par suite $m=0$. La courbe cherchée coupera les génératrices à angle droit, et comme alors $\frac{dz}{ds}=0$, on voit que c'est une circonférence dont le plan est parallèle a la base du cône.

Si les deux points sont donnés sur une même génératrice, ou sur deux génératrices faisant entre elles l'angle 2α, on a $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$, ce qui donne $\mathrm{L}\sqrt{a^2+b^2}=\mathrm{L}\sqrt{a'^2+b'^2}-2n\pi\mathrm{N}$, équation qui déterminera N d'après la valeur donnée à n. Si $n=0$, comme $\sqrt{a^2+b^2}$ diffère de $\sqrt{a'^2+b'^2}$, il faut que $\mathrm{N}=\infty$

d'où $m = 1$: la courbe se confond alors avec la génératrice.

L'équation déjà obtenue $\sigma = s\sqrt{1 - m^2\cos^2\alpha}$ indique que le rapport entre une portion quelconque de la courbe et sa projection est constant, de sorte qu'il suffit de calculer un arc de la spirale logarithmique pour avoir celui de la spirale conique qui lui correspond.

De l'équation $dr = \dfrac{m\sin\alpha}{\sqrt{1 - m^2\cos^2\alpha}}\,d\sigma$, on tire

$$\frac{m\sin\alpha}{\sqrt{1 - m^2\cos^2\alpha}}\,\sigma = r + \mathrm{A}\,;$$

A étant une constante qui se déterminera en mettant pour r la valeur du rayon vecteur qui correspond au point où l'arc commence sur la spirale logarithmique, et on aura

$$m\sin\alpha s = \mathrm{A} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Comme le plan tangent au cône fait toujours le même angle α avec l'axe des z, il y aura toujours le même rapport entre l'aire d'un élément de surface conique comprise entre deux génératrices et l'arc de la courbe, et la projection de cet élément sur le plan xy : il suffira donc de calculer un secteur de la projection, et de le diviser par $\sin\alpha$ pour avoir celui de la surface conique dont il est la projection.

On trouve ainsi pour ce secteur conique :

$$\frac{1}{4\mathrm{N}}\,\frac{r^2}{\sin\alpha} + \mathrm{B}, \text{ ou bien } \frac{1}{4\mathrm{N}}\,\frac{x^2 + y^2}{\sin\alpha} + \mathrm{B},$$

B se déterminant par la condition que l'aire commence en un point donné.

Pour avoir le plan osculateur, il faut calculer dx, d^2x, dy, d^2y : on sait déjà que $dz = m\cos\alpha ds$, et que $d^2z = 0$, en prenant s pour variable indépendante.

Or $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, d'où on tire en observant que $dr = m\sin\alpha\, ds$, et $dr = \mathrm{N}r\,d\theta$, d'où $d\theta = \frac{m\sin\alpha}{\mathrm{N}r}ds$,

$$dx = (\mathrm{N}\cos\theta - \sin\theta)\frac{m\sin\alpha}{\mathrm{N}}ds,\ dy = (\mathrm{N}\sin\theta + \cos\theta)\frac{m\sin\alpha}{\mathrm{N}}ds,$$

$$d^2x = -(\mathrm{N}\sin\theta + \cos\theta)\frac{m^2\sin^2\alpha}{\mathrm{N}^2 z}ds^2,\ d^2y = (\mathrm{N}\cos\theta - \sin\theta)\frac{m^2\sin^2\alpha}{\mathrm{N}^2 z}ds^2.$$

Le plan osculateur a pour équation, en remplaçant $\cos\theta$ par $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, et $\sin\theta$ par $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$(z-z')\sqrt{x^2+y^2}\tang\alpha\frac{\mathrm{N}^2+1}{\mathrm{N}} = (x-x')(\mathrm{N}x-y)+(y-y')(\mathrm{N}y+x).$$

Ce plan fait avec celui des xy un angle dont le cosinus est $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{N}^2}{(\mathrm{N}^2+1)\tang^2\alpha}}} = \sqrt{1-m^2\cos^2\alpha}$. Il est donc toujours incliné d'une même quantité sur le plan de la base du cône, et son inclinaison est la même que celle de la tangente à la spirale conique. Le plan normal aura pour équation :

$$(x-x')(\mathrm{N}x-y)+(y-y')(\mathrm{N}y+x)+$$
$$+(z-z')\sqrt{x^2+y^2}\frac{\mathrm{N}}{\tang\alpha} = 0.$$

Le cosinus de l'angle qu'il fait avec la base est $m\cos\alpha$, valeur trouvée pour $\frac{dz}{ds}$, ce qui doit être.

Il suit de là que si, par un point de l'espace, on mène des plans parallèles aux plans osculateurs, chacun d'eux sera tangent à un même cône droit, qui sera leur enveloppe, et dont l'axe sera parallèle à celui du cône donné. Il en sera de même pour des plans parallèles aux plans normaux.

En désignant par ρ le rayon de courbure, on a généralement :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

d'où ici

$$\rho = \frac{N^2 r}{m^2 \sin^2\alpha \sqrt{N^2+1}} = \frac{r}{\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-m^2\cos^2\alpha}}.$$

Ce rayon de courbure est, comme on voit, dans un rapport constant avec le rayon vecteur de la spirale logarithmique mené à la projection du point qu'on considère sur la spirale conique. De plus, ce rayon de courbure est toujours parallèle à la base du cône, puisque le cosinus de l'angle qu'il fait avec l'axe des z est proportionnel à $\frac{d^2z}{ds^2}$, quantité nulle. Il est donc projeté en vraie grandeur sur le plan xy, et suivant la direction du rayon de courbure de la spirale logarithmique, avec lequel il coïncidera en partie; et lui sera proportionnel, car ρ' étant ce dernier, on a $\rho' = r\sqrt{1+N^2}$,

d'où $$\rho = \frac{N^2\rho'}{m^2\sin^2\alpha(1+N^2)} = \frac{\rho'}{1-m^2\cos^2\alpha}.$$

On voit de plus que ρ surpasse ρ' de $\frac{\rho' m^2\cos^2\alpha}{1-m^2\cos^2\alpha}$.

Il suit de ce qui précède que r' étant le rayon vecteur de la projection du centre de courbure pour le point de la spirale conique auquel se rapportent r et θ, on aura :

$$r' = r\sqrt{1 + \frac{1}{(1-m^2)(1-m^2\cos^2\alpha)} - \frac{2\cos\omega}{\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-m^2\cos^2\alpha}}},$$

ω étant l'angle que fait ρ avec r, et qui a pour tangente la constante N. Donc $r' = Mr = Ke^{N\theta}$, M et K étant constants.

Le lieu des centres de courbure est projeté, comme on voit, suivant une spirale logarithmique.

Comme le centre de courbure a la même ordonnée en z

que le point de la courbe qu'on considère, en nommant x', y' ses deux autres coordonnées, et remplaçant dans l'équation du cône $\sqrt{x^2+y^2}$ par $\frac{1}{M}\sqrt{x'^2+y'^2}$, on trouvera :

$$zM \operatorname{tang}\alpha = \sqrt{x'^2+y'^2}.$$

Ce sera la seconde équation du lieu des centres ; ce lieu est donc une spirale conique analogue à la première, tracée sur un cône dont l'angle a pour tangente $M \operatorname{tang}\alpha$.

Quand on développera le cône sur un plan, comme on a trouvé $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = ms$, on aura sur ce plan $R = ms$, d'où $R = C'e^{\frac{m'}{\sqrt{1-m^2}}\theta}$ pour l'équation de la courbe : c'est encore une spirale logarithmique. Enfin la développante de la courbe cherchée est plane, et c'est encore une autre spirale logarithmique située sur un plan parallèle à celui de la base du cône.