Sur un nouveau principe de mécanique, fondamental et général, d'après M. Gauss

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 477-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__477_1>

SUR UN NOUVEAU PRINCIPE DE MÉCANIQUE,

fondamental et général.

D'après M. Gauss. (Crelle, tome IV, p. 232. 1829.)

---

m_1, m_2, m_3 .... est un système de points matériels soumis à des *forces* et à des *liaisons* quelconques. Soient a_1, a_2, a_3.... les positions respectives de ces points au bout du temps t; et c_1, c_2, c_3 .... les positions de ces mêmes points au bout du temps $t + dt$; et si les liaisons n'eussent pas existé, si le système était entièrement libre, supposons que les points fussent parvenus respectivement dans l'instant dt, en b_1, b_2, b_3 ...., de sorte que c_1b_1, c_2b_2, etc. mesurent les déviations instantanées respectives.

On peut considérer le point m_1 comme soumis au bout du temps t à deux forces ; l'une se combinant avec la vitesse et la direction qui animent le point m_1, le mène dans l'instant dt en c_1 ; et l'autre, telle que si elle était appliquée au point m_1 en repos en c_1, elle le transporterait en b_1 dans l'instant dt ; de même pour les points m_2, m_3 .... Et d'après le principe de d'Alembert, ce second système de forces doit être en équilibre.

Appliquons à ce système le principe des vitesses virtuelles. Soient $c_1\gamma_1$, $c_2\gamma_2$, $c_3\gamma_3$, etc. des directions différentes de c_1b_1, c_2b_2, c_3b_3, etc., mais compatibles avec les liaisons du système ; et soient θ_1, θ_2, θ_3 les angles que forment $\gamma_1c_1b_1$, $\gamma_2c_2b_2$...., etc. ; alors, d'après le principe des vitesses virtuelles $\Sigma mcb.c\gamma\cos\theta$ doit être ou zéro, ou négatif et jamais positif ; $cb, c\gamma, \theta$ représentent l'une quelconque de ces directions.

Or on a :

$$\overline{\gamma b}^2 - \overline{cb}^2 = \overline{c\gamma}^2 - 2cb\,.\,c\gamma\cos\theta\,;$$

donc

$$\Sigma m\,.\,\overline{\gamma b}^2 - \Sigma m\,.\,\overline{cb}^2 = \Sigma m\,.\,\overline{c\gamma}^2 - 2\Sigma m\,.\,cb\,.\,c\gamma\,.\cos\theta.$$

Or le second membre de cette équation est essentiellement positif; donc $\Sigma m\overline{\gamma b}^2$ est essentiellement plus grand que $\Sigma\,.\,m\,.\,cb^2$; c'est-à-dire que $\Sigma m\,.\,\overline{cb}^2$ est un minimum. On a donc ce principe général et fondamental : « Le mouvement » d'un système de points matériels, liés entre eux d'une ma- » nière quelconque, et dont les mouvements sont soumis à » des limitations extérieures quelconques, s'opère à chaque » instant dans la plus grande coïncidence possible avec le » mouvement libre ou avec la moindre contrainte possible, » en prenant pour mesure de la contrainte que tout le sys- » tème éprouve dans chaque instant, la somme des produits » de la masse de chaque point matériel par le carré de sa » déviation instantanée de la direction libre. »

L'illustre auteur donne un énoncé plus juste que celui qui est en usage, du principe des vitesses virtuelles. Il faut, dit-il, que la *somme* ne puisse jamais devenir positive. Car l'expression usitée suppose tacitement, par exemple, qu'un point placé sur une surface est forcé d'y rester, que la distance de deux points est invariable ; ce sont des restrictions inutiles et souvent incompatibles. Ainsi, la surface d'un corps impénétrable ne contraint pas un point matériel de rester sur elle, mais s'oppose seulement à son passage de l'autre côté ; un fil inextensible et flexible, tendu entre deux points, rend impossible l'accroissement, mais non la diminution de la distance. Il convient d'adopter un énoncé qui embrasse de suite tous les cas possibles et que Poisson a effectivement admis dans la 2^{me} édition de sa Mécanique.

Il est remarquable, termine l'illustre géomètre, que lorsque les mouvements libres ne peuvent exister, avec des conditions nécessaires, ils sont modifiés par la nature de la même manière que le calculateur, dans la méthode des *moindres carrés*, compense des expériences qui se rapportent à des grandeurs qui ont entre elles des dépendances nécessaires.

Cette ingénieuse observation fait ressortir l'utilité philosophique du principe de la *moindre contrainte* qui pourra quelquefois servir de point de départ.

On trouve dans le même mémoire une objection contre l'emploi que Laplace fait du principe de la moindre action pour démontrer la loi de la double réfraction. Ce principe dépend essentiellement de la conservation des forces vives ; d'après laquelle les vitesses sont déterminées uniquement par les positions des points, sans que les *directions* des vitesses aient la moindre influence ; ce qu'on admet pourtant dans cette expérience de physique. Tm.