NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANNE

Théorèmes sur des tangentes à la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 464-467

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__464_0>

THÉORÈMES

sur des tangentes à la parabole.

PAR M. ANNE,
Professeur.

—

Théorème I.

Si des différents points N (*Fig.* 49) d'une tangente CM à une parabole, on mène deux droites, l'une NF au foyer, l'autre NB tangente, l'angle FNB de ces deux droites est constant et égal à l'angle FMC de la tangente primitive et du rayon vecteur mené à son point de contact.

En effet, la tangente AY au sommet de la parabole est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes; donc le quadrilatère FBCN est inscriptible dans un cercle de diamètre FN ; donc l'angle FCB = FNB comme sous-tendant le même arc.

De plus, on sait que FC est bissectrice de l'angle MFA ; par conséquent l'angle FCB, complément de CFA, l'est aussi de MFC et par conséquent est égal à FMC.

Donc FMC = FNB. C. Q. F. D.

Théorème II.

Si des différents points K (*Fig.* 50) d'une corde de contact de deux tangentes AC, AB à une parabole, on mène deux parallèles KD, KE aux deux tangentes, il en résulte un parallélogramme dont la seconde diagonale DE est tangente à la parabole.

Pour le démontrer, si KD est parallèle à AB et DE tangente à la parabole, il suffit d'établir que AE = DK.

Soit F le foyer de la parabole et joignons-le aux différents points notés sur la figure.

D'abord, il résulte évidemment du théorème précédent, que si une tangente roule entre deux autres, elle est constamment vue du foyer sous le même angle. (Théorème qui est encore vrai pour l'ellipse et pour l'hyperbole.) *Voir* t. II, p. 535, théor. XII, et t. III, p. 439.

Donc, les angles AFC, EFD, BFA sont égaux, et par suite, DFC = AFE; mais par le premier théorème, FCD = FAE. Ainsi les deux triangles DFC, AEF sont semblables et donnent :

$$CD : AE :: CF : FA\,;$$

les triangles ACF, ABF pour les mêmes raisons sont semblables et donnent :

$$CF : FB :: CA : AB\,;$$

d'où
$$CD : AF :: CA : AB.$$

Mais le parallélisme de DK, AB donne :

$$CD : DK :: CA : AB.$$

Donc DK = AE. Ce qu'il fallait démontrer.

Scholie. Si l'on voulait trouver l'équation de la parabole inscrite dans l'angle YAX et tangente aux points CB;

Prenant AY pour axe des y et AX pour axe des x, et posant $AC = b$, $AB = a$, l'équation générale de la courbe

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

donnerait pour établir ces conditions :

$$x = 0\,;\; y^2 + \frac{D}{A}y + \frac{F}{A} = 0 = (y - b)^2,$$

$$y = 0\,;\; x^2 + \frac{E}{C}x + \frac{F}{C} = 0 = (x - a)^2,$$

$$B^2 = 4AC\,;\quad \frac{D}{A} = -2b\,;\quad \frac{E}{C} = -2a\,;\quad \frac{F}{A} = b^2\,;\quad \frac{F}{C} = a^2\,;$$

éliminant, on trouve :

$$\frac{D}{A} = -2b\,;\quad \frac{E}{A} = -\frac{2b^2}{a}\,;\quad \frac{F}{A} = b^2\,;\quad \frac{C}{A} = \frac{b^2}{a^2}\,;\quad \frac{B}{A} = \pm 2\frac{b}{a}.$$

On a donc pour équation du problème :

$$a^2y^2 \pm 2abxy + b^2x^2 - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 = 0.$$

Le signe supérieur donne le carré parfait :

$$(ay + bx - ab)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1\right)^2 = 0,$$

équation de la corde de contact CB.

Le signe inférieur donne la parabole demandée ·

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 = 0.$$

Note. On parvient directement à ce résultat au moyen de nos relations d'identité.

L'on a, dans le cas actuel, $l = l' = m = 0$; remplaçant les six coefficients de l'équation générale par leurs valeurs tirées des identités (t. I, p. 490), on obtient de suite :

$$k^2y^2 \pm 2kk'xy + k'^2x^2 + 2kny + 2k'nx + n^2 = 0.$$

Faisant $x = 0$, on tire $y = \frac{-n}{k} = b$; et de même $\frac{-n}{k'} = a$; remplaçant dans cette équation k et k' par $\frac{-n}{b}$, $\frac{-n}{a}$, on obtient l'équation de M. Anne ; en général, dans toute question concernant la parabole, l'on a $B^2 = 4AC = 0$; B doit avoir un double signe.

Lorsqu'au lieu d'une parabole, il s'agit, avec les mêmes données, d'une autre conique, l'équation correspondante est :

$$a^2y^2 \pm xy\sqrt{4a^2b^2 + m} + b^2x^2 - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 = 0\,;$$

or on a $$B^2 - 4a^2b^2 = m\,;$$

d'où $$B = \pm\sqrt{4a^2b^2 + m}.$$

Lorsqu'on connaît m, deux coniques de même espèce répondent à la question, et lorsque $m = 0$, une des paraboles se réduit à une droite. Tm.