DURVILLE

De la théorie des diviseurs rationnels

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 439-454

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__439_1>

DE LA THÉORIE DES DIVISEURS RATIONNELS.

(Suite, voyez p. 339.)

PAR M. DURVILLE,
professeur au collége Saint-Louis.

Soit une équation

$$Fx = x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} \ldots\ldots + A_m = 0,$$

dont les coefficients sont entiers; proposons-nous d'étendre la méthode des diviseurs du second degré à la détermination des diviseurs rationnels du troisième, du quatrième degré, etc. du polynôme Fx.

Comme Fx est entier, tout diviseur rationnel de Fx est entier ainsi que le quotient correspondant; soit $x^3 - px^2 - qx - r$ un diviseur du troisième degré, et soient B_1, B_2, ... B_{m-3} les coefficients des différents termes du quotient à partir du second, et par conséquent les premiers termes des restes successifs que présente l'opération de la division. Le dernier reste sera du second degré, et en suivant l'analogie des notations, il doit être représenté par $B_{m-2}x^2 + B_{m-1}x + B_m$, et comme il doit être nul pour toute valeur donnée à x, il donne lieu aux trois équations de condition $B_{m-2}=0$, $B_{m-1}=0$, $B_m=0$, qui doivent être satisfaites simultanément par le système des valeurs entières de p, q, r, coefficients du diviseur du troisième degré.

On trouve entre les quantités $B_1, B_2, B_3, \ldots B_m$, les relations :

$$A\left\{\begin{array}{l} B_1=A_1+p, \\ B_2=A_2+pB_1+q, \\ B_3=A_3+pB_2+qB_1+r, \\ B_4=A_4+pB_3+qB_2+rB_1, \\ \vdots \\ B_{m-3}=A_{m-3}+pB_{m-4}+qB_{m-5}+rB_{m-6}, \\ 0=B_{m-2}=A_{m-2}+pB_{m-3}+qB_{m-4}+rB_{m-5}, \\ 0=B_{m-1}=A_{m-1}+qB_{m-3}+rB_{m-4}, \\ 0=B_m=A_m+rB_{m-3}, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire, m équations entre les $m-3$ coefficients $B_1, B_2, \ldots B_{m-3}$ du quotient, et les trois coefficients p, q, r du diviseur. Il faut trouver des valeurs entières de p, q, r qui satisfassent à ces équations, en déterminant aussi des valeurs entières pour les coefficients B_1, B_2, etc. du diviseur.

Proposons-nous d'abord d'éliminer les $m-3$ coefficients $B_1, B_2 \ldots$ et d'obtenir les trois équations $B_{m-2}=0$, $B_{m-1}=0$, $B_m=0$ en fonction seulement des quantités p, q, r.

Je remarque que si l'on fait le développement de $(x^3-px^2-qx-r)^{-1}$ ou du quotient $\dfrac{1}{x^3-px^2-qx-r}$, on trouve une série récurrente du troisième ordre :

$$x^{-3}+px^{-4}+\left.\begin{array}{l} p^2 \\ +q \end{array}\right| x^{-5}+\left.\begin{array}{l} p^3 \\ +2pq \\ +r \end{array}\right| x^{-6}\ldots$$

et si on représente les coefficients successifs par φ_0, φ_1, φ_2.... la loi de ces coefficients sera exprimée par l'égalité :

$$\varphi_n = p\varphi_{n-1} + q\varphi_{n-2} + r\varphi_{n-3}.$$

Cela posé, soit le système d'équations :

$$\begin{aligned}
B_h &= A_h + pB_{h-1} + qB_{h-2} + rB_{h-3},\\
B_{h-1} &= A_{h-1} + pB_{h-2} + qB_{h-3} + rB_{h-4},\\
&\vdots\\
B_4 &= A_4 + pB_3 + qB_2 + rB_1,\\
B_3 &= A_3 + pB_2 + qB_1 + r,\\
B_2 &= A_2 + pB_1 + q,\\
B_1 &= A_1 + p.
\end{aligned}$$

Multiplions la première équation par φ_0, la deuxième par φ_1, etc., la dernière par φ_{h-1}, tous les coefficients B_{h-1}, B_{h-2} .... B_2, B_1 disparaîtront, et on aura :

$$B_h = A_h\varphi_0 + A_{h-1}\varphi_1 + A_{h-2}\varphi_2 \cdots + A_1\varphi_{h-1} + r\varphi_{h-3} + q\varphi_{h-2} + p\varphi_{h-1};$$

mais $$\varphi_h = p\varphi_{h-1} + q\varphi_{h-2} + r\varphi_{h-3};$$

donc

$$B_h = A_h\varphi_0 + A_{h-1}\varphi_1 + A_{h-2}\varphi_2 \cdots + A_2\varphi_{h-2} + A_1\varphi_{h-1} + \varphi_h;$$

donc, si on fait successivement $h = m-3$, $m-4$, $m-5$, et qu'on porte les valeurs de B_{m-3}, B_{m-4}, B_{m-5} dans les trois dernières équations $B_{m-2}=0$, $B_{m-1}=0$, $B_m=0$, on aura :

$$B_{m-2}=A_{m-2}+pA_{m-3}+\left.\begin{array}{r}p\varphi_1\\+q\\ \end{array}\right|A_{m-4}+\left.\begin{array}{r}p\varphi_2\\+q\varphi_1\\+r\end{array}\right|A_{m-5}\cdots\left.\begin{array}{r}+p\varphi_{m-3}\\+q\varphi_{m-4}\\+r\varphi_{m-5}\end{array}\right\}=0,$$

$$B_{m-1}=A_{m-1}+qA_{m-3}+\left.\begin{array}{r}q\varphi_1\\+r\end{array}\right|A_{m-4}+\left.\begin{array}{r}q\varphi_2\\+r\varphi_1\end{array}\right|A_{m-5}\cdots\left.\begin{array}{r}+q\varphi_{m-3}\\+r\varphi_{m-4}\end{array}\right\}=0,$$

$$B_m = A_m + rA_{m-3} + r\varphi_1 A_{m-4} + r\varphi_2 A_{m-5} \cdots + r\varphi_{m-3} = 0,$$

qui doivent être satisfaites par un même système de valeurs entières de p, q, r.

Si l'on connaissait la valeur de p et celle de r, et qu'on les substituât dans ces équations, elles deviendraient seulement fonctions de q, et devraient avoir une solution entière commune; donc si l'on représente par G, G′, G″ l'ensemble des termes indépendants de q dans les trois équations $B_{m-2}=0$, $B_{m-1}=0$, $B_m=0$; G, G′, G″ pour ces valeurs de p et r deviendront des nombres ayant pour diviseur commun la valeur de q correspondante.

G, G′, G″ étant des multiples de la valeur de q, les résultats que l'on obtiendra par voie d'addition ou de soustraction de ces polynômes seront encore des multiples de cette valeur de q : par conséquent, on pourra éliminer p entre les trois équations $G=M(q)$, $G'=M(q)$, $G''=M(q)$, et on obtiendra deux fonctions de r, qui, pour une valeur convenable de cette inconnue, deviendront des nombres ayant pour facteur commun la valeur correspondante de q.

Pour former les polynômes G, G′, G″, il faut, dans les équations $B_{m-2}=0$, $B_{m-1}=0$, $B_m=0$ et dans les fonctions φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, etc., faire $q=0$.

Or, si on représente par ψ_1, $\psi_2 \ldots \psi_n$ les valeurs des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, pour $h=0$ on aura :

$$G = A_{m-2} + pA_{m-3} + p\psi_1 A_{m-4} + \left.\begin{array}{l} p\psi_2 \\ +r \end{array}\right| A_{m-5} \ldots \begin{array}{l} +p\psi_{m-3}, \\ +r\psi_{m-5}, \end{array}$$

$$G' = A_{m-1} + rA_{m-4} + r\psi_1 A_{m-5} \ldots\ldots\ldots\ldots + r\psi_{m-4},$$

$$G'' = A_m + rA_{m-3} + r\psi_1 A_{m-4} + r\psi_2 A_{m-5} \ldots\ldots + r\psi_{m-3}.$$

D'ailleurs, des valeurs

$$\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = p,\ \varphi_2 = p^2 + q,\ \varphi_3 = p^3 + 2pq + r \ldots.$$

on déduit :

$$\psi_0 = 1,\ \psi_1 = p,\ \psi_2 = p^2,\ \psi_3 = p^3 + r \ldots,$$

et de l'équation

$$\varphi_n = p\varphi_{n-1} + q\varphi_{n-2} + r\varphi_{n-3},$$

on déduit la loi de formation des fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ...,

$$\psi_n = p\psi_{n-1} + r\psi_{n-3};$$

d'où

$$\psi_n - p\psi_{n-1} = r\psi_{n-3}.$$

On peut remplacer le système des trois polynômes G, G′, G″ par un autre système plus simple par rapport à p et composé de l'un d'eux et de deux autres obtenus en combinant G, G′, G″ par voie d'addition ou de soustraction : ainsi on éliminera ψ_{m-3} et on trouvera ;

$$K = Gr - G''p = rA_{m-2} + r^2A_{m-5} + \psi_1(r^2A_{m-6} - A_m) + r^2\psi_2A_{m-7} \dots$$
$$\dots + r^2\psi_{m-5};$$
$$K' = G'' - G'p = A_m + rA_{m-3} + r^2A_{m-6} + \psi_1(r^2A_{m-7} - A_{m-1}) +$$
$$+ r^2\psi_2A_{m-8} \dots r^2\psi_{m-6};$$
$$G' = A_{m-1} + rA_{m-4} \dots + r\psi_{m-4}.$$

On remplacera de même le système des trois polynômes K, K′ et G′ par un autre plus simple par rapport à p, on parviendra ainsi à éliminer cette inconnue, et on obtiendra deux polynômes Q et Q′ seulement fonctions de r, et qui, pour une valeur convenable de cette inconnue, auront pour facteur commun la valeur correspondante de q.

Supposons connues les valeurs de q et r, les deux dernières des équations (A) feront connaître B_{m-3}, B_{m-4} : entre les $m-2$ premières, j'élimine les $m-5$ quantités B_1, B_2.... B_{m-5}, et j'obtiens les trois équations suivantes fonctions de p et des quantités supposées connues q, r, B_{m-3} et B_{m-4} :

$$0 = -B_{m-4} + A_{m-4} + A_{m-5}\varphi_1 + A_{m-6}\varphi_2 \dots + \varphi_{m-4},$$
$$0 = -B_{m-3} + A_{m-3} + A_{m-4}\varphi_1 + A_{m-5}\varphi_2 \dots + \varphi_{m-3},$$
$$0 = B_{m-2},$$

qui devront avoir une solution entière commune; donc la valeur cherchée de p sera diviseur commun des trois termes indépendants de cette inconnue dans ces équations ; représentons-les par P, P′, P″.

Cela posé, pour trouver les diviseurs du troisième degré du polynôme $Fx = x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} \ldots + A_m$, on posera r égal successivement aux diviseurs de A_m affectés du double signe.

Soit r' une valeur de r, on la portera dans les polynômes Q et Q'; soient $\pm q'$, $\pm q''$ les facteurs communs aux valeurs de ces polynômes, on substituera r' et successivement les nombres $\pm q'$, $\pm q''$ et les valeurs correspondantes de B_{m-3} et B_{m-4} dans les trois polynômes P, P', P'', les nombres $\pm q'$, $\pm q''$ .... devront être rejetés si les trois polynômes n'ont pas de facteurs communs. Si la substitution des nombres r' et q' donne aux trois polynômes un diviseur commun p', pour que le système des valeurs p', q', r' convienne, il faut que, substituées dans les équations (A), elles satisfassent à ces équations en déterminant pour les coefficients B_1, B_2, etc.... des valeurs entières. Il est évident que cette condition est nécessaire et suffisante. Il sera bon, avant d'opérer cette substitution, de constater que les nombres p', q', r' satisfont aux deux conditions $\dfrac{F(1)}{1-p'-q'-r'} = n$, $\dfrac{F(-1)}{-1-p'+q'-r'} = n$, n représentant un nombre entier.

La même théorie pourrait servir à déterminer les diviseurs du quatrième degré.

Soit le diviseur $x^4 - px^3 - qx^2 - rx - s$, en éliminant les $m-4$ coefficients B_1, B_2 .... B_{m-4} entre les m équations,

$$\text{B}\left\{\begin{aligned}
&B_1 = A_1 + p,\\
&B_2 = A_2 + pB_1 + q,\\
&\vdots\\
&B_{m-4} = A_{m-4} + pB_{m-5} + qB_{m-6} + rB_{m-7} + sB_{m-8},\\
0 = {}&B_{m-3} = A_{m-3} + pB_{m-4} + qB_{m-5} + rB_{m-6} + sB_{m-7},\\
0 = {}&B_{m-2} = A_{m-2} + qB_{m-4} + rB_{m-6} + sB_{m-6},\\
0 = {}&B_{m-1} = A_{m-1} + rB_{m-4} + sB_{m-5},\\
0 = {}&B_m = A_m + sB_{m-4},
\end{aligned}\right.$$

on aura les quatre équations $B_{m-3}=0$, $B_{m-2}=0$, $B_{m-1}=0$, $B_m=0$ fonctions seulement de p, q, r, s. Soient G, G$'$, G$''$, G$'''$ les termes indépendants de r dans ces équations, ces quatre polynômes, pour des valeurs convenables p', q', s' de p, q, s, deviendront des nombres ayant pour diviseur commun la valeur r' correspondante de r ; et si, entre les quatre équations $G=M(r)$, $G'=M(r)$, $G''=M(r)$, $G'''=M(r)$, on élimine p et q, on obtiendra deux polynômes R et R$'$ seulement fonctions de s, et qui, par la substitution de la valeur convenable s', auront pour diviseur commun r'.

Les deux dernières des équations (B) feront connaître B_{m-4} et B_{m-5} ; et si entre les $m-2$ premières, on élimine les $m-6$ coefficients B_1, B_2, B_3, ... B_{m-6}, on aura quatre équations fonctions de p, q et des quantités connues r', s', B_{m-4}, B_{m-5}, les quatre termes indépendants de q devront pour la valeur p' de p être multiples de la valeur cherchée q' ; donc, en éliminant p on obtiendra trois polynômes Q, Q$'$, Q$''$, qui, pour les valeurs de r' et s', auront pour diviseur commun q'. En prenant les quatre termes indépendants de p renfermés dans ces équations, et éliminant q, on trouvera de même trois polynômes P, P$'$, P$''$ seulement fonctions de r et s, et qui, pour les valeurs r' et s', auront pour diviseur commun p. Il faudra ensuite vérifier comme précédemment si les valeurs s', r', q', p' satisfont aux équations (B).

Application de la méthode précédente.

Soit d'abord une équation du sixième degré à décomposer en facteurs du troisième :

$$x^6+A_1x^5+A_2x^4+A_3x^3+A_4x^2+A^5x+A^6=0.$$

On aura :

$$\mathrm{A}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{B}_1 = \mathrm{A}_1 + p \\ \mathrm{B}_2 = \mathrm{A}_2 + p\mathrm{B}_1 + q \\ \mathrm{B}_3 = \mathrm{A}_3 + p\mathrm{B}_2 + q\mathrm{B}_1 + r \\ 0 = \mathrm{B}_4 = \mathrm{A}_4 + p\mathrm{B}_3 + q\mathrm{B}_2 + r\mathrm{B}_1 \\ 0 = \mathrm{B}_5 = \mathrm{A}_5 + q\mathrm{B}_3 + r\mathrm{B}_2 \\ 0 = \mathrm{B}_6 = \mathrm{A}_6 + r\mathrm{B}_3 \end{array}\right.$$

en éliminant

$$\mathrm{B}_1\ \mathrm{B}_2,\ \mathrm{B}_3,$$

on trouve :

$$0 = \mathrm{B}_4 = \mathrm{A}_4 + p\mathrm{A}_3 + \begin{array}{l|l|l} p\varphi_1 & \mathrm{A}_2 + p\varphi_2 & \mathrm{A}_1 + p\varphi_3 \\ +q & \quad +q\varphi_1 & \quad +q\varphi_2 \\ & \quad +r & \quad +r\varphi_1 \end{array}$$

$$0 = \mathrm{B}_5 = \mathrm{A}_5 + q\mathrm{A}_3 + \begin{array}{l|l|l} q\varphi_1 & \mathrm{A}_2 + q\varphi_2 & \mathrm{A}_1 + q\varphi_3 \\ +r & \quad +r\varphi_1 & \quad +r\varphi_2 \end{array}$$

$$0 = \mathrm{B}_6 = \mathrm{A}_6 + r\mathrm{A}_3 + r\varphi_1\mathrm{A}_2 + r\varphi_2\mathrm{A}_1 + r\varphi_3\ ;$$

les termes indépendants de q sont dans ces équations

$$\mathrm{G} = \mathrm{A}_4 + p\mathrm{A}_3 + p\psi_1\mathrm{A}_2 + \begin{array}{l|l} p\psi_2 & \mathrm{A}_1 + p\psi_3 \\ +r & \quad +r\psi_1 \end{array}$$

$$\mathrm{G}' = \mathrm{A}_5 + r\mathrm{A}_2 + r\psi_1\mathrm{A}_1 + r\psi_2$$

$$\mathrm{G}'' = \mathrm{A}_6 + r\mathrm{A}_3 + r\psi_1\mathrm{A}_2 + r\psi_2\mathrm{A}_1 + r\psi_3\,,$$

que l'on remplace par le système :

$$\mathrm{K} = \mathrm{G}r - \mathrm{G}''p = r\mathrm{A}_4 + r^2\mathrm{A}_1 + \psi_1(r^2 - \mathrm{A}_6)$$

$$\mathrm{K}' = \mathrm{G}'' - \mathrm{G}'p = \mathrm{A}_6 + r\mathrm{A}_3 + r^2 - \mathrm{A}_5\psi_1$$

$$\mathrm{G}' = \mathrm{A}_5 + r\mathrm{A}_2 + r\psi_1\mathrm{A}_1 + r\psi_2\ ;$$

ou bien en posant

$\alpha = \mathrm{A}_6 + r\mathrm{A}_3 + r^2, \qquad \alpha' = r\mathrm{A}_4 + r^2\mathrm{A}_1, \qquad \alpha'' = \mathrm{A}_5 + r\mathrm{A}_2,$

on a :

$$\mathrm{K} = \alpha' + \psi_1(r^2 - \mathrm{A}_6)$$

$$\mathrm{K}' = \alpha - \mathrm{A}_5\psi_1$$

$$\mathrm{G}' = \alpha'' + r\psi_1\mathrm{A}_1 + r\psi_2\ ;$$

d'où l'on déduira :

$$\mathrm{Q} = \alpha(r^2 - \mathrm{A}_6) + \alpha'\mathrm{A}_5$$

$$\mathrm{Q}' = \alpha''\mathrm{A}_5^2 + \alpha r(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_5 + \alpha).$$

Si entre les quatre premières des équations (A) on élimine B_1, on trouve les trois équations :

$$0 = -B_2 + A_2 + q + A_1 p + p^2$$
$$0 = -B_3 + A_3 + qA_1 + r + p(B_2 + q)$$
$$0 = A_4 + qB_2 + rA_1 + p(B_3 + r),$$

dont les deux dernières sont du premier degré.

Ainsi :

$$P = -B_2 + A_2 + q$$
$$P' = -B_3 + A_3 + qA_1 + r$$
$$P'' = A_4 + qB_2 + rA_1.$$

On remarquera que dans ce cas particulier non-seulement P, P′, P″ doivent avoir un diviseur commun, mais encore les quotients $\frac{P'}{B_2+q}$, $\frac{P''}{B_3+r}$, exprimant la valeur de p pris en signe contraire, doivent être entiers et égaux entre eux.

Soit l'exemple numérique

$$Fx = x^6 - x^5 - 22x^4 + 46x^3 - 42x^2 + 11x + 14 = 0,$$

equation dont le premier membre n'admet de diviseurs rationnels ni du premier ni du second degré, proposons-nous de déterminer ses diviseurs du troisième degré.

Si le premier membre admet un diviseur du troisième degré, il sera le produit de deux facteurs de ce même degré ; il suffira d'essayer pour r les diviseurs du dernier terme 14 jusqu'à la racine carrée de ce nombre, en les prenant avec le double signe : ainsi, on devra poser :

$$r = \pm 1, \qquad r = \pm 2,$$

soit $\qquad r = 1,$

on trouve :

$$B_3 = -14.$$

$\alpha = 61$, $\alpha' = -43$ $\alpha'' = -11$, $Q = -1266$, $Q' = +1719$,

dont les diviseurs communs sont ± 1, ± 3.

Essayons donc les systèmes $r=1\begin{cases}q=\pm 1\\ q=\pm 3.\end{cases}$

1° $r=1,\quad q=1.$

De l'équation $0=A_5+qB_3+rB_2$ on tire $B_2=3$, substituant pour p, q, r, B_3, B_2, leurs valeurs dans l'équation $\frac{P''}{B_3+r}=$ $=\frac{A_4+qB_2+rA_1}{B_3+r}$, on trouve un nombre fractionnaire, donc, ce système doit être rejeté.

2° $r=1,\quad q=-1.$

On trouve :

$$B_2=-25,$$

et $\frac{P''}{B_3+r}$ fractionnaire.

3° $r=1,\quad q=3.$

On a :

$$B_3=-14,\quad B_2=-31,$$

et $\frac{P''}{B_3+r}$ fractionnaire.

4° $r=1,\quad q=-3.$

On trouve :

$$B_3=-14,\quad B_2=-53,$$

et $\frac{P''}{B_3+r}$ fractionnaire.

Ainsi, on doit rejeter ces différents systèmes.

Soit $r=-1,$

on trouve :

$$B_3=14,\quad \alpha=-31,\quad \alpha'=41,\quad \alpha'=33,$$
$$Q=854,\quad Q'=2691,$$

dont les diviseurs communs sont ± 1.

Or les valeurs ($r=-1,\quad q=1$) donnent $B_3=14,\quad B_2=25$, et les valeurs ($r=-1,\ q=-1$) donnent $B_3=14,\ B_2=-3,$

et ces deux systèmes doivent être également rejetés comme donnant pour $\frac{P''}{B_3+r}$ un nombre fractionnaire.

Soit $$r=2,$$
$$\alpha=110,\quad \alpha'=-88,\quad \alpha''=-33,$$
$$Q=-2068,\quad Q'=17787,$$
dont les diviseurs communs sont ± 1,
pour le système $(r=2,\quad q=1)$
on trouve :
$$B_3=-7,\quad B_2=-2,$$
pour le système $(r=2,\quad q=-1)$
on trouve :
$$B_3=-7,\quad B_2=-9\ ;$$
ils donnent l'un et l'autre pour p, une valeur fractionnaire.

Soit $$r=-2,$$
$$\alpha=-74,\quad \alpha'=80,\quad \alpha''=55,$$
$$Q=1620=2^2.3^4.5,\quad Q'=5925=3.5^2.79,$$
dont les diviseurs communs sont ± 1, ± 3, ± 5, ± 15;
pour $(r=-2,\quad q=1)$ on trouve : $B_3=7,\quad B_2=9$,
$(r=-2,\quad q=-1)$ $B_3=7,\quad B_2=2$,
$r=-2,\quad q=3$ $B_3=7,\quad B_2=16$.

Et pour ces systèmes $\frac{P''}{B_3+r}$ est fractionnaire, donc ils doivent être rejetés.

Le système $(r=-2,\quad q=-3)$
donne $B_3=7,\quad B_2=-5$.

$\frac{P''}{B_3+r}=-5\ \frac{P'}{B_2+q}=-5,\quad P=-30$; donc, p peut être egal à 5; on vérifiera que cette valeur est exacte en constatant que les deux premières des équations (A)
$$B_1=A_1+p,\quad B_2=A_2+pB_1+q$$
sont satisfaites.

On trouvera $B_1=4$.

Donc, le premier membre Fx de l'équation proposée est le produit des facteurs $(x^3-5x^2+3x+2)\,(x^3+4x^2-5x+7)$.

On voit que cette méthode s'applique facilement à l'équation du sixième degré, dont le nombre des diviseurs du troisième degré s'élève cependant à $\dfrac{6\times5\times4}{1.\ 2.\ 3}$ ou 20.

Soit maintenant une équation du huitième degré.

$$x^8+A_1x^7+A_2x^6+A_3x^5+A_4x^4+A_5x^3+A_6x^2+A_7x+A_8=0\ ;$$

on a :

$$A\left\{\begin{array}{r}
B_1=A_1+p\\
B_2=A_2+pB_1+q\\
B_3=A_3+pB_2+qB_1+r\\
B_4=A_4+pB_3+qB_2+rB_1\\
B_5=A_5+pB_4+qB_3+rB_2\\
0=B_6=A_6+pB_5+qB_4+rB_3\\
0=B_7=A_7+qB_5+rB_4\\
0=B_8=A_8+rB_5.
\end{array}\right.$$

$$G=A_6+pA_5+p\psi_1A_4+\begin{array}{c|c|c|c} p\psi_2 & A_3+p\psi_3 & A_2+p\psi_4 & A_1+p\psi_5\\ +r & +r\psi_1 & +r\psi_2 & +r\psi_3\end{array}$$

$$G'=A_7+rA_4+r\psi_1A_3+r\psi_2A_2+r\psi_3A_1+r\psi_4$$

$$G''=A_8+rA_5+r\psi_1A_4+r\psi_2A_3+r\psi_3A_2+r\psi_4A_1+r\psi_5,$$

que l'on remplace en éliminant ψ_5 par le système

$$K=Gr-pG''=rA_6+r^2A_3+\psi_1(A_2r_2-A_8)+r^2\psi_2A_1+r^2\psi_1.$$

$$K'=G''-pG'=A_8+rA_5+r^2A_2+\psi_1(r^2A_1-A_7)+r^2\psi_2.$$

$$G'=A_7+rA_4+r\psi_1A_3+r\psi_2A_2+r\psi_3A_1+r\psi_4.$$

Et celui-ci par le suivant :

$$L=K-K'p=rA_6+r^2A_3+r^3-\psi_1(rA_5+2A_8)+A_7\psi_2\ ,$$

$$L'=G'r-Kp=rA_7+r^2A_4+r^3A_1+\psi_1(r^3-rA_6)+\psi_2A_8\ ,$$

$$K'=A_8+rA_5+r^2A_2+\psi_1(r^2A_1-A_7)+r^2\psi_2\ ;$$

ou bien, en posant :

$$A_8 + rA_5 + r^2A_2 = \alpha, \qquad r^2A_1 - A_7 = \beta,$$
$$rA_6 + r^2A_3 + r^3 = \alpha', \qquad rA_5 + 2A_8 = \beta',$$
$$rA_7 + r^2A_4 + r^3A_1 = \alpha'', \qquad r^3 - rA_6 = \beta'',$$

on a $K' = \alpha + \beta\psi_1 + r^2\psi_2$,
$$L = \alpha' - \beta'\psi_1 + A_7\psi_2,$$
$$L' = \alpha'' + \beta''\psi_1 + A_8\psi_2;$$

d'où l'on déduit :

$$M = K'A_7 - Lr^2 = \alpha A_7 - \alpha' r^2 + \psi_1(\beta A_7 + \beta' r^2),$$
$$M' = LA_8 - L'A_7 = \alpha' A_8 - \alpha'' A_7 - \psi_1(\beta' A_8 + \beta'' A_7),$$
$$K' = \alpha + \beta\psi_1 + r^2\psi_2;$$

ensuite :

$$Q = (\alpha A_7 - \alpha' r^2)(\beta' A_8 + \beta'' A_7) + (\alpha' A_8 - \alpha'' A_7)(\beta A_7 + \beta' r^2),$$
$$N = \alpha(\beta' A_8 + \beta'' A_7) + \psi_1[\beta(\beta' A_8 + \beta'' A_7) + r^2(\alpha' A_8 - \alpha'' A_7)],$$
$$M = \alpha A_7 - \alpha' r^2 + \psi_1(\beta A_7 + \beta' r^2);$$

et enfin les deux polynômes :

$$Q = (\alpha A_7 - \alpha' r^2)(\beta' A_8 + \beta'' A_7) + (\alpha' A_8 - \alpha'' A_7)(\beta A_7 + \beta' r^2),$$
$$Q' = r^2[(\beta' A_8 + \beta'' A_7)(\alpha\beta' + \beta\alpha') - (\alpha A_7 - \alpha' r^2)(\alpha' A_8 - \alpha'' A_7)],$$

qui sont fonctions seulement de r.

Si entre les six premières des équations (A) on élimine les trois coefficients B_1, B_2, B_3, on aura les trois équations fonctions de p et des quantités q, r, B_4, B_5 :

$$0 = -B_4 + A_4 + A_3\varphi_1 + A_2\varphi_2 + A_1\varphi_3 + \varphi_4,$$
$$0 = -B_5 + A_5 + A_4\varphi_1 + A_3\varphi_2 + A_2\varphi_3 + A_1\varphi_4 + \varphi_5,$$
$$0 = B_6 = A_6 + pB_5 + qB_4 + r(A_3 + A_2\varphi_1 + A_1\varphi_2 + \varphi_3);$$

et si on remplace φ_1, φ_2, φ_3, etc. par leurs valeurs, on trouvera, pour les termes indépendants de p, les valeurs :

$$P = -B_4 + A_4 + A_2 q + A_1 r + q^2,$$
$$P' = -B_5 + A_5 + A_2 r + A_3 q + 2qr + A_1 q^2,$$
$$P'' = A_6 + A_3 r + r^2 + B_4 q + A_1 qr.$$

Exemple numérique.

Soit l'équation

$$x^8 - 6x^7 + 15x^6 - 22x^5 - 19x^2 + x + 15 = 0,$$

qui n'admet de diviseurs rationnels ni du premier ni du second degré, comme on peut s'en assurer par la méthode exposée dans un des numeros précédents (*voyez* p. 339).

On a :

$$A_1 = -6,\ A_2 = 15,\ A_3 = -22,\ A_4 = 0,\ A_5 = 0,\ A_6 = -19,$$
$$A_7 = 1,\ A_8 = 15. \quad F(1) = -15, \quad F(-1) = 39.$$

Les valeurs que l'on doit donner à r sont :

$$\pm 1, \quad \pm 3, \quad \pm 5, \quad \pm 15.$$

Les systèmes des valeurs de p et q qui correspondent à $r = \pm 1$ donnant tous des valeurs entières pour les coefficients B_1, B_2, etc., exigent pour être vérifiés qu'on les substitue dans toutes les équations (A); par conséquent il est plus simple dans la pratique de commencer par essayer les autres valeurs de r.

On fera donc $r = \pm 3, \quad \pm 5, \quad \pm 15, \quad \pm 1.$

Soit $r = 3.$

On trouve :

$$B_5 = -5, \quad \alpha = 150, \quad \alpha' = -228, \quad \alpha'' = -159,$$
$$\beta = -55, \quad \beta' = 30, \quad \beta'' = 84;$$
$$\text{et} \quad Q = 474753 \quad \text{et} \quad Q' = 9 \times 16280082,$$

dont les diviseurs communs sont ± 1, ± 3.

Si pour déterminer B_4 on remplace q par ces valeurs dans l'équation $0 = A_7 + qB_5 + rB_4$, on voit que q et r doivent être premiers entre eux, puisque $A_7 = 1$; donc $q = \pm 3$ doit être rejeté. De plus, la seule valeur $q = -1$ donne pour B_4 une valeur entière qui est -2. Remplaçant q, r, B_5 et B_4 par leurs valeurs dans les polynômes P, P', P'', on trouve $P = -30$, $P' = 60$, $P'' = -56$, dont les diviseurs sont $p = \pm 1$, ± 2; donc il faut essayer si les valeurs $r = 3$, $q = -1$ et $p = \pm 1$, ± 2 satisfont aux conditions $\frac{F(1)}{1-p-q-r} = N$, $\frac{F(-1)}{-1-p+q-r} = N$. Or le seul système $r = 3$, $q = -1$, $p = -2$ les vérifie. Substituons ces valeurs dans les équations (A), en remontant à partir de la sixième jusqu'à la première. On trouve pour B_3 une valeur fractionnaire; donc ce système doit aussi lui-même être rejeté.

Soit $r = -3$.

on aura :

$$B_5 = 5,\quad \alpha = 150,\quad \alpha' = -168,\quad \alpha'' = 159,\quad \beta = -55,$$
$$\beta' = 30,\quad \beta'' = -84,\quad Q = 3 \times 10769,\quad Q' = 3^4 \times 2 \times 526741,$$

dont les diviseurs communs sont ± 1, ± 3. Or q et r doivent être premiers entre eux ; donc on doit rejeter la valeur ± 3. D'ailleurs, à $q = -1$ correspond B_4 fractionnaire; donc la seule valeur à essayer est $q = 1$, qui donne $B_4 = 2$. Substituons les valeurs $r = -3$, $q = 1$, $B_5 = 5$, $B_4 = 2$ dans les polynômes P, P', P'', nous trouverons $P = 32$, $P' = -84$, $P'' = 76$; donc $p = \pm 1$, ± 2, ± 4. Les valeurs $p = 2$, $p = 4$ sont les seules qui vérifient les conditions $\frac{F(1)}{1-p-q-r} = n$, $\frac{F(-1)}{-1-p+q-r} = n$; mais étant substituées dans les équations de condition (A), la première donne pour B_3 et la seconde pour B_1 une valeur fractionnaire ; donc elles doivent être l'une et l'autre rejetées.

Soit $r = 5$.

On trouve :

$$B_5 = -3,\ \alpha = 390,\ \alpha' = -520,\ \alpha'' = -745,\ \beta = -151,\ \beta' = 30,$$
$$\beta'' = 220,\ Q = 5 \times 3 \times 316357,\ Q' = 2 \times 3^2 \times 5^4 \times 114751,$$

dont les diviseurs commums sont ± 1, ± 3, ± 5. La seule valeur qui donne B_4 entier est $q = -3$; et si on porte les valeurs $r=5$, $q=-3$, $B_5=-3$ et $B_4=-2$ dans les polynômes P, P', P'', on obtient $P=-64$, $P'=60$, $P''=-8$, dont les diviseurs communs sont ± 1, ± 2, ± 4 ; la seule valeur qui satisfasse aux conditions $\frac{F(1)}{1-p-q-r}=n$, $\frac{F(-1)}{-1-p+q-r}=n$ est $+4$. Donc il faut substituer les valeurs $r=5$, $q=-3$, $p=4$ dans les équations (A), à partir de la sixième en remontant jusqu'à la première ; on trouve qu'elles sont toutes satisfaites et donnent les valeurs entières $B_3=+5$, $B_2=+4$, $B_1=-2$. Donc le premier membre de l'équation donnée est divisible par le facteur x^3-4x^2+3x-5, et par conséquent est le produit des deux facteurs irréductibles

$$(x^3-4x^2+3x-5)(x^5-2x^4+4x^3+5x^2-2x-3).$$