Nouvelles annales de mathématiques

Terquem

Théorème sur le triangle situé dans le plan d’une conique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 419-421

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__419_1>

THÉORÈME

sur le triangle situé dans le plan d'une conique.

I. *Problème.* Étant données deux sécantes dans le plan d'une conique, mener par leur point d'intersection deux autres sécantes simultanément conjuguées harmoniques par rapport aux premières sécantes et conjuguées par rapport à la conique.

Solution. Soient MN, MP les deux sécantes données ; je prends MN pour axe des x et MP pour axe des y ; et soient $y = px$, $y = qx$ l'équation des deux autres sécantes ; l'équation de la conique est à six termes ; les nouvelles sécantes devant être conjuguées harmoniques par rapport aux axes, on a $p + q = 0$ (*Voir* t. II, p. 306, *Observation*). Les mêmes sécantes devant être conjuguées par rapport à la conique,

on a : $$Ap^2 - C = 0 \text{ (t. I, p. 495) ;}$$

d'où $$p=\sqrt{\frac{C}{A}};$$

ainsi le problème est toujours possible dans l'ellipse et la parabole; pour l'hyperbole, le problème n'est possible que lorsque A et C sont de même signe, c'est-à-dire lorsque les deux sécantes axes sont toutes deux simultanément parallèles à des diamètres qui rencontrent ou qui ne rencontrent pas.

Soit r le produit des segments formés par sécante MN, et s le produit des segments formés par la sécante MP, pris à partir de M, on aura :

$$p=\sqrt{\frac{s}{r}}\ \text{(t. III, p. 511)};$$

α étant l'angle que forme la troisième sécante avec l'axe des x, et α' l'angle qu'elle forme avec l'axe des y, on a :

$$p=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}=\sqrt{\frac{s}{r}};$$

il est évident qu'une sécante entre dans l'angle des coordonnées de même signe, et l'autre dans l'angle adjacent. Lorsque les deux axes donnés sont des tangentes, la sécante intérieure devient un diamètre.

II. *Théorème.* Un triangle ABC étant situé dans le plan d'une conique, si par le sommet A on mène deux sécantes simultanément conjuguées harmoniques par rapport aux côtés AB, AC, et conjuguées par rapport à la conique; de même aux sommets B et C; les trois sécantes intérieures se coupent en un même point; de même deux sécantes extérieures partant des sommets A et B, et la sécante intérieure partant de C : en tout, quatre points de rencontre.

Démonstration. Soient α et α' les angles que forme la sécante intérieure partant de A avec les côtés AC et AB ; β et β' les angles que forme la sécante en B avec BA et BC ; γ et

γ' les angles que fait la sécante en C avec CB et CA ; $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha'}$ est égal au rapport des segments formés en A, sur AB et AC suffisamment prolongés (I). De même $\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta'}$ et $\frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \gamma'}$ pour les segments formés en B et en C ; donc $\frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{\sin^2 \alpha' \sin^2 \beta' \sin^2 \gamma'}$ est égal au produit des trois rapports segmentaires. Mais d'après le théorème de Carnot, ce produit est égal à l'unité ; donc $\frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma'} = \pm 1$, le signe supérieur indique que les trois sécantes intérieures se rencontrent en un même point, et le signe inférieur est relatif à la seconde partie du théorème. Mais pour l'hyperbole, le théorème ne subsiste qu'avec la restriction signalée ci-dessus.

Observation I. Lorsque les côtés du triangle sont des tangentes à la conique, un des quatre points de rencontre est le centre de la conique, et les trois autres points de rencontre sont les centres respectifs de coniques semblables à la conique donnée, semblablement située et touchant les côtés du triangle ; propriétés faciles à démontrer.

Observation II. Lorsque la conique est un cercle, le théorème donne la propriété élémentaire des bissectrices des angles d'un triangle ; et par la méthode des projections, ce théorème élémentaire suffit pour établir le théorème relatif à l'ellipse, mais non pour les deux coniques à branches infinies.

Observation III. Le théorème subsiste également lorsque le triangle ABC est inscrit dans la conique ; alors le rapport segmentaire se trouvant sous la forme de $\frac{0}{0}$ a une valeur déterminée (t. III, p. 512).