NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TURQUAN

Sur le moyen d'obtenir l'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires, lorsque cette courbe est donnée par sa tangente

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 410-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__410_0>

SUR LE MOYEN

d'obtenir l'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires, lorsque cette courbe est donnée par sa tangente.

PAR M. TURQUAN,
Professeur au Collége royal de Pontivy.

En disant qu'une courbe est donnée par sa tangente, j'entends qu'elle est donnée par une équation $f(a, y, p) = 0$, entre les coordonnées x, y, du point de contact, et la tangente trigonométrique p de l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x.

Je supposerai que l'équation f soit algébrique, et j'admettrai qu'en un point donné d'une courbe quelconque, on ne puisse mener qu'une seule tangente, à moins que le point donné ne soit un point multiple ou un point conjugué. Or une courbe ne peut avoir qu'un très-petit nombre de semblables points.

Il résulte de là que si l'équation f est d'un degré pair par rapport à p, elle doit avoir des racines égales pour des valeurs d'x et d'y qui répondent à un point de la courbe ; car, si cela n'était pas, il arriverait qu'en chaque point donné, quand même il ne serait ni un point conjugué, ni un point multiple, on ne pourrait mener aucune tangente, ou l'on en pourrait mener plusieurs.

Par conséquent, le polynôme dérivé de f par rapport à p, doit être nul. Il suffira donc d'éliminer p entre f et sa dérivée par rapport à p, pour avoir l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires.

Cette démonstration ne s'applique pas au cas où l'équation f est d'un degré impair. Mais la suivante, plus générale, s'appliquera à tous les cas.

Remplaçons p par p', et supposons que p' représente l'inclinaison d'une sécante. Pour que cette sécante puisse caractériser la courbe, elle ne doit point rester quelconque, mais elle doit être assujettie à remplir certaines conditions, par exemple, à sous-tendre constamment un arc de grandeur donnée. Or cet arc pouvant être compté à droite ou à gauche du point donné xy, il en résulte qu'à un même point donné sur la courbe répondent deux de ces sécantes, et par conséquent, deux valeurs réelles de p', et cela quel que soit l'arc sous-tendu.

Si maintenant l'arc sous-tendu devient nul, la sécante devient tangente, et à chaque valeur d'x et d'y ne répondra plus qu'une valeur de p'. Je dis que cependant le degré de l'équation f n'aura pas changé. Car p' désignant l'inclinaison de la sécante, et p l'inclinaison de la tangente, on pourra poser $p' = p + \pi$;
d'où

$$0 = f(x, y, p') = f(x, y, p + \pi) = f(xy, p) + \frac{\pi}{1} f'(xy, p) + $$
$$+ \frac{\pi^2}{1.2.} f''(x, y, p) + .. \text{ etc.}$$

Et quand la sécante sera devenue tangente, c'est-à-dire quand π sera devenu nul, l'équation se réduira à

$$f(x, y, p) = 0.$$

Ainsi le degré de l'équation ne change pas, et à chaque valeur d'x et d'y répond une valeur de moins pour p. Donc, deux valeurs de p sont devenues égales.

Quand l'équation f est du second degré par rapport à p, on peut trouver l'équation de la courbe sans élimination; car soit $\qquad p^2 + p\varphi(x, y) + \psi(xy) = 0,$

on aura en résolvant par rapport à p,

$$p = -\frac{1}{2}\varphi(x,y) \pm \sqrt{\frac{\varphi(x,y)^2}{4} - \psi(x,y)}.$$

Et comme les valeurs de p doivent être égales, on doit avoir

$$\frac{\varphi(x,y)^2}{4} = \psi(x,y)$$

c'est l'équation demandée.

Pour exemple proposons-nous ce problème : Trouver une courbe telle que le produit des distances de sa tangente à deux points fixes soit egal à une surface donnée b^2.

En désignant par $2c$ la distance des deux points fixes, et par p l'inclinaison de la tangente en un point quelconque, on trouvera facilement l'équation suivante :

$$(y-px)^2 = p^2(c^2+b^2)+b^2,$$

ou

$$p^2 - \frac{2xy}{x^2-b^2-c^2} \pm \sqrt{\frac{x^2y^2-(y^2-b^2)(x^2-b^2-c^2)}{(x^2-b^2-c^2)^2}}.$$

Et par suite pour l'équation de la courbe

$$x^2y^2-(y^2-b^2)(x^2-b^2-c^2)=0;$$

et toute réduction faite

$$(c^2+b^2)y^2+b^2x^2=b^2(c^2+b^2).$$

Equation d'une ellipse dont l'origine est au centre, et qui a pour axes b, et $\sqrt{c^2+b^2}$.

On résoudrait de la même manière le problème suivant : Quelle est la courbe qui jouit de cette propriété, que, en prenant pour axe des abscisses, la ligne qui joint deux points fixes, les ordonnées de la tangente correspondantes à ces points fixes, aient un produit constant égal à b^2.

Note. Le problème proposé est indéterminé. Il y a une infinité de courbes qui satisfont à la question ; l'enveloppe de toutes ces courbes y satisfait aussi ; et c'est l'équation de cette enveloppe qui est ici indiquée ; souvent cette enveloppe suffit, par exemple, dans cette question traitée par M. Raabe (Crelle, t. I, p. 330, 1826) : Étant donnée une conique et un point fixe dans son plan, trouver une seconde courbe telle, que chaque point de la conique soit également éloigné de la seconde courbe et du point fixe. On parvient à une équation différentielle du premier ordre ; il est évident qu'une solution particulière résout aussi le problème ; si le point fixe est un foyer, la solution particulière est un cercle, que, par analogie avec ce qui existe dans la parabole, M. Raabe a désigné sous le nom de *cercle directeur*. (Voir Blum. t. II, p. 60).