NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VAUQUELIN

Problème. Trouver le lieu des foyers des différentes ellipses assujetties à être tangentes à quatre droites données

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 401-405

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__401_0>

PROBLÈME.

Trouver le lieu des foyers des différentes ellipses assujetties à être tangentes à quatre droites données.

PAR M. VAUQUELIN,
Élève de mathématiques spéciales au collége de Saint-Louis,
classe de M. AMIOT.

Soit ABCD le quadrilatère donné. Je prends pour axe des x une des tangentes AD, et pour axe des y une perpendiculaire AY à AD menée par le point où cette dernière droite coupe la tangente contiguë AB.

Ceci posé, soient F, F′ deux foyers appartenant à une des ellipses en question, et soient x, y les coordonnées du point F ; x', y' celles du point F′.

On sait que le produit des deux perpendiculaires abaissées des deux foyers d'une ellipse sur une tangente à cette courbe est constant et égal à b^2, b étant la moitié du petit axe de l'ellipse. Or les distances des points F, F′ à chacune des tangentes s'expriment facilement en fonction des coordonnées de ces points et des coefficients constants qui entrent dans l'équation de cette tangente. Ainsi, en égalant successivement à b^2 chacun des quatre produits, on aura quatre équations entre les quantités b^2, x', y', x, y et des coefficients connus. On pourra donc éliminer les trois quantités b^2, x', y' entre ces quatre équations, et l'équation résultante en x, y sera celle du lieu cherché.

Telle est la marche que j'ai adoptée pour résoudre la question. J'effectue rapidement les calculs.

Le produit des distances de F et de F à AD est yy'. Ainsi on a la relation :

$$yy' = b^2. \qquad (1)$$

Soit $y = mx$ l'équation de AB ; le produit des distances correspondantes sera :

$$\frac{(y - mx)}{\sqrt{m^2 + 1}} \times \frac{(y' - mx')}{\sqrt{m^2 - 1}}.$$

On aura donc :

$$\frac{(y - mx)(y' - mx')}{m^2 + 1} = b^2. \qquad (2)$$

Soient enfin $y = m_1x + n_1$ l'équation de BC et $y = m_2x + n_2$ celle de CD, on aura pareillement :

$$\frac{(y - m_1x - n_1)(y' - m_1x' - n_1)}{m_1^2 + 1} = b^2, \qquad (3)$$

$$\frac{(y - m_2x - n_2)(y' - m_2x' - n_2)}{m_2^2 + 1} = b^2. \qquad (4)$$

Éliminant b^2 entre ces quatre équations, on aura les trois nouvelles équations :

$$yy' = \frac{(y - mx)(y' - mx')}{m^2 + 1},$$

$$yy' = \frac{(y - m_1x - n_1)(y' - m_1x' - n_1)}{m_1^2 + 1},$$

$$yy' = \frac{(y - m_2x - n_2)(y' - m_2x' - n_2)}{m_2^2 + 1}.$$

Chassant les dénominateurs, simplifiant et ordonnant par rapport à x', y', on obtient .

$$y'(my + x) + x'(y - mx) = 0,$$

$$y'(m_1^2y + m_1x + n_1) + x'(m_1y - m_1^2x - m_1n_1) = -$$
$$-(n_1y - n_1m_1x - n_1^2),$$

$$y'(m_2^2y + m_2x + n_2) + x'(m_2y - m_2^2x - m_2n_2) = -$$
$$-(n_2y - n_2m_2x - n_2^2).$$

Pour éliminer x', y' entre ces trois équations, je prends dans la première x' en fonction de y', et portant cette valeur de x' dans les autres, j'ai :

$$y'[(mx-y)(m_1^2y+m_1x+n_1)+(my+x)(m_1y-m_1^2x-m_1n_1)]=-$$
$$-(mx-y)(n_1y-n_1m_1x-n_1^2),$$
$$y'[(mx-y)(m_2^2y+m_2x+n_2)+(my+x)(m_2y-m_2^2x-m_2n_2)]=-$$
$$-(mx-y)(n_2y-n_2m_2x-n_2^2).$$

En divisant ces deux dernières équations, membre à membre, chassant les dénominateurs et ordonnant par rapport à x et y, on obtient, toutes réductions faites :

$$\left.\begin{array}{l} y^3[m_1n_2(m-m_1)-m_2n_1(m-m_2)]+x^3[n_2(m-m_1)-n_1(m-m_2)]mm_1 \\ +y^2x[n_2(m-m_1)-n_1(m-m_2)]m_1m_2+yx^2[n_2m_1(m-m_1)-n_1m_2(m-m_2)] \\ +y^2[n_2^2m_1(m_1-m)-n_1^2m_2(m_2-m)-n_1n_2m(m_1-m_2)]+2xyn_1n_2(m_2-m_1) \\ +x^2[mn_1n_2(m_1-m_2)+m_1n_2^2(m_1-m)+m_2n_1^2(m-m_2)] \\ +y[n_2^2n_1(1+mm_1)-n_1^2n_2(1+mm_2)]+x[n_2^2n_1(m_1-m)-n_1^2n_2(m_2-m)] \end{array}\right\} = 0.$$

Cette équation est du troisième degré et ne peut pas, en général, se décomposer en facteurs. Donc, dans le cas général, la courbe est du troisième degré. Il est bon d'observer qu'elle passe par l'origine. Or, si on avait pris pour axe des x une autre tangente, et pour axe des y une perpendiculaire à cette tangente menée par le point où elle coupe la tangente contiguë, on aurait eu un résultat de même forme. Donc :

La courbe passe par les quatre sommets du quadrilatère que forment les quatre tangentes (*).

On pourrait, du reste, s'en assurer directement en portant dans l'équation de la courbe, les coordonnées des points d'intersection ; mais la remarque précédente en dispense.

L'équation, dans toute sa généralité, offrirait une discussion peu intéressante ; mais quelques hypothèses particulières sur la position des droites vont donner des résultats assez curieux.

(*) Et par les deux autres du quadrilatère complet (p. 373). Tm.

En supposant, par exemple, BC parallèle à AD, on a $m_1 = 0$. Cette hypothèse réduit l'équation à :

$$\left.\begin{array}{l} y^3(m_2-m)m_2-yx^2(m-m_2)m_2-[n_1m_2(m_2-m)-n_2mm_2]y^2 \\ -[mm_2n_2-m_2n_1(m-m_2)]x^2+2xyn_2m_2 \\ +[n_2^2-n_1n_2(1+mm_2)]y-[n_2^2m+n_1n_2(m_1-m)]x \end{array}\right\}=0.$$

Si on suppose, de plus, que CD soit parallèle à AB, ce qui revient à faire $m_2 = m$ dans l'équation précédente, on aura :

$$m^2y^2-m^2x^2+2mxy=[n_2-n_1(1+m^2)]y-n^2mx=0. \quad \text{(A)}$$

Cette courbe est du deuxième degré. De plus, si on forme la quantité B^2-4AC, on a $B^2-4AC = 4m^2+4m^4$, quantité essentiellement positive. Ainsi la courbe est une hyperbole. Mais alors le quadrilatère est un parallélogramme. Donc :

Le lieu des foyers des ellipses assujetties à être tangentes aux quatre côtés d'un parallélogramme est une hyperbole qui jouit de la propriété de passer par les quatre sommets du parallélogramme.

On peut supposer que ce parallélogramme devienne rectangle. Pour cela, il faut faire m infini. Mais on aura alors une indétermination provenant de ce que n_2 devient aussi infini. Pour parer à cet inconvénient, je remarque, en reprenant l'équation, que l'ordonnée à l'origine pour la droite CD est $a = -\frac{n_2}{m_2}$, d'où $n_2 = -m_2a$, et comme ici $m_2 = m$, $n_2 = -ma$. Portant cette valeur dans l'équation (A), elle devient :

$$m^2y^2-m^2x^2+2mxy-[ma+m(1+m^2)]y+m^2ax=0.$$

Divisant par m^2 et faisant $m = \infty$, on a :

$$y^2-x^2-n_1y+ax=0.$$

Ainsi, dans ce cas, l'hyperbole est équilatère. Elle est d'ailleurs facile à construire ; car ses axes sont parallèles aux côtés du rectangle, et son centre est le centre même de ce rectangle.

Enfin on peut imaginer que le rectangle devienne un carré, et pour cela il suffit de faire $n_1 = a$.

Alors l'équation devient :

$$y^2 - x^2 - ay + ax = 0 ;$$

d'où

$$(y - x)(y + x) - a(y - x) = 0 ;$$

et par suite :

$$(y - x)(y + x - a) = 0.$$

Ce qui donne les deux équations distinctes :

$$y - x = 0, \quad y + x - a = 0,$$

qui sont celles des deux diagonales du carré.

Il est bon de remarquer que dans tous les cas les points qui appartiennent véritablement aux foyers ne forment qu'une *portion* de la courbe totale (*).