Nouvelles annales de mathématiques

Terquem

Soixante théorèmes sur les coniques inscrites dans un quadrilatère et autant sur les coniques circonscrites à un quadrilatère

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 384-388

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__384_1>

SOIXANTE THÉORÈMES

sur les coniques inscrites dans un quadrilatère et autant sur les coniques circonscrites à un quadrilatère.

1. Avec les six coefficients d'une équation du second degré à deux variables, on peut former les six fonctions m, n, k, k', l, l', qu'on rencontre dans toutes les propriétés des coniques, et dont nous avons fait connaître les relations mutuelles (t. I, p. 489). Ces relations donnent toujours les solutions les plus simples, les plus rapides, les plus fécondes. Voici un exemple frappant de cette fécondité. Il suffit de connaître les rapports de cinq de ces quantités à la sixième, pour que la conique soit complétement déterminée. Soit une conique inscrite dans un quadrilatère et rapportée à des axes quelconques, et soit $dy + ex + f = 0$ l'équation d'un côté du quadrilatère ; les trois autres droites ont des équations analogues, avec les mêmes lettres, mais accentuées, d', d'', d''', etc. Ce côté étant tangent, on a la relation :

$$mf^2 - 2den + 2fek + 2fdk' + le^2 + l'd^2 = 0 \quad \text{(t. II, p. 108)}$$

et trois équations semblables pour les trois autres côtés. Choisissons m pour le comparer aux cinq autres quantités ; nous avons donc quatre équations du premier degré entre les cinq rapports :

$$\frac{n}{m}, \; \frac{k}{m}, \; \frac{k'}{m}, \; \frac{l}{m}, \; \frac{l'}{m}.$$

Éliminant, par la formule de Cramer, trois quelconques de ces rapports, on obtient une équation toujours du premier degré entre les deux rapports restants. Considérant ces deux rapports restants comme les coordonnées courantes d'un point, il s'ensuit que le lieu géométrique de ce point est une droite. Les cinq rapports, pris deux à deux, fournissent dix combinaisons. On a donc dix points pour chacun desquels le lieu géométrique est une droite. Nous avons choisi m pour dénominateur commun ; mais on peut prendre pour cela une quelconque des six quantités ; il existe donc soixante points différents, et qui ont pour lieux géométriques soixante droites différentes, qui peuvent donner matière à autant d'énoncés de théorèmes. Or la théorie des polaires réciproques nous apprend qu'à chaque propriété d'une courbe inscrite dans un polygone correspond une propriété d'une conique circonscrite à un polygone homonyme. On a donc cent vingt théorèmes. Toutefois ces cent vingt théorèmes ne sont qu'une richesse spécieuse ; ils se réduisent aux deux théorèmes suivants.

II. *Théorème.* Le lieu géométrique du pôle d'une droite fixe, relativement à une conique inscrite dans un quadrilatère, est une droite.

Démonstration. Choisissons k pour le dénominateur commun, et $\frac{l}{k}$ et $\frac{n}{k}$ pour les deux rapports restants (1) ; le lieu du point qui a ces deux rapports pour coordonnées est donc une droite ; mais ces coordonnées sont celles du pôle de l'axe des y, qui représente une droite quelconque ; donc, etc. La construction de la droite est facile. Soit ABCD le quadrilatère, D' la droite donnée ; la diagonale AC représente une ellipse inscrite ; pour avoir le pôle de D' relativement à cette ellipse, il faut prolonger AC jusqu'à ce qu'elle rencontre D' en un point E ; prendre entre A et C un point F harmoniquement conjugué à E ; de sorte que C, F, A, E soient quatre points harmoniquement placés ; et F sera le pôle de D'. On fera de même pour la diagonale BD ; on a ainsi deux points de la droite des pôles. En se servant de la troisième diagonale, on obtient un troisième point, en ligne droite avec les deux premiers ; théorème de géométrie élémentaire, utile exercice. Si la droite D' se transporte à l'infini, ses pôles sont les centres des coniques, le point F est au milieu de la diagonale, et on retombe sur le théorème de Newton.

III. *Théorème.* L'enveloppe de la polaire d'un point fixe, prise relativement à une conique circonscrite à un quadrilatère, est un point fixe.

Démonstration. Faisant usage des propriétés des polaires réciproques, on voit que ce théorème est une conséquence immédiate du théorème précédent. Soit ABCD le quadrilatère, et E le point fixe ; soit F l'intersection des côtés opposés AB, CD ; menons EF, et un rayon FG harmoniquement conjugué à FE ; de sorte que FE, FD, FG, FA forment un faisceau harmonique ; le point fixe cherché est sur FG. On fera la même construction pour les deux autres côtés opposés AD, BC ; on a donc deux droites sur lesquelles se trouve le point d'enveloppe des polaires.

On peut encore employer au même but les deux diagonales AC, BD ; ce qui donne lieu aussi à un théorème de géométrie élémentaire.

Lorsque le point donné s'éloigne à l'infini, sa polaire devient un diamètre conjugué à celui sur lequel se trouve le point. On a donc cette proposition : Si par tous les centres des coniques circonscrites à un même quadrilatère, on mène des diamètres parallèles, les diamètres sont respectivement conjugués par un même point fixe.

Remarque. Nous donnerons incessamment la théorie des polaires réciproques. Doublant nos richesses et économisant la moitié du travail, cette brillante invention de M. Poncelet, géomètre français, n'est pas admise dans l'enseignement français, dans ce qu'on appelle l'instruction classique.

IV. *Théorème.* L'enveloppe de la polaire d'un point, prise par rapport à une conique inscrite dans un quadrilatère, est une ligne du troisième degré.

Démonstration. $Dy + Ex + 2F = 0$ est la polaire de l'origine. Remplaçant les coefficients par leurs valeurs, il vient :

$$(k'l + kn)y + (kl' + k'n)x + n^2 - ll' = 0. \qquad (1)$$

Faisons $\frac{n}{m} = z$; les quatre équations relatives aux quatre côtés du quadrilatère donnent (t. II, p. 108) :

$$\frac{k}{m} = az + b; \quad \frac{k'}{m} = a'z + b'; \quad \frac{l}{m} = a''z + b''; \quad \frac{l'}{m} = a'''z + b'''.$$

Les a et les b sont des quantités connues. Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient une équation de cette forme :

$$y(pz^2 + qz + r) + x(p'z^2 + q'z + r') + p''z^2 + q''z + r'' = 0. \quad (2)$$

Les p, q, r sont des quantités connues ; dérivant par rapport à z, on a :

$$2z(py + p'x + p'') + qy + q'x + q'' = 0.$$

Éliminant z entre cette équation et l'équation (2), le résultat est une équation du troisième degré, répondant à l'enveloppe de la polaire de l'origine, qui représente un point quelconque du plan ; donc, etc. Les termes du troisième degré sont $(py + p'x)(qy + q'x)^2$; la courbe est donc de la sixième ou de la septième espèce d'Euler (Int. in An., t. II, p. 120).

Corollaire. Si, par tous les centres des coniques inscrites à un quadrilatère, on mène des diamètres parallèles, les diamètres respectivement conjugués enveloppent une ligne du troisième degré.

V. *Théorème.* **Le lieu des pôles d'une droite fixe, relativement à des coniques circonscrites à un quadrilatère, est une ligne du sixième degré.**

Démonstration. Par les polaires réciproques; toutefois lorsque la droite s'éloigne à l'infini, le lieu des pôles est du second degré; il devient le lieu des centres (p. 304). Tm.

Mnémonique des six fonctions élémentaires.

VI Ces fonctions, base analytique de la théorie des coniques, sont des dérivées premières de la fonction L. En effet, on a :

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC);$$

d'où

$$\frac{dL}{dA} = l'; \quad \frac{dL}{dB} = -n; \quad \frac{dL}{dC} = l; \quad \frac{dL}{dD} = k'; \quad \frac{dL}{dE} = k; \quad \frac{dL}{dF} = m.$$

Ces équations sont utiles aussi quand il s'agit de questions *de maximis* et *de minimis* sur L et dans de certaines questions de haute analyse. Tm.