Les trois racines de l'équation du troisième degré $a_\circ x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ déduites des formules de Cardan, lorsque $a_\circ = 0$. D'après M. Bonniakowski

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 382-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__382_1>

LES TROIS RACINES

de l'équation du troisième degré $a_0x^2 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ *déduites des formules de Cardan, lorsque* $a_0 = 0$.

(D'après M. Bonniakowski (Crelle, t. III, p. 347).

Soit l'équation $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$.

Faisons $x = y - \frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0^2}$, il vient $y^3 + py + q = 0$,

ou

$$p = \frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{3}\frac{a_1^2}{a_0^2}; \quad q = \frac{2}{27}\frac{a_1^3}{a_0^3} - \frac{1}{3}\frac{a_1a_2}{a_0^2} + \frac{a_3}{a_0},$$

et les trois valeurs de x sont :

$$a_0x = -\frac{1}{3}a_1 - \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \sqrt[3]{A - \sqrt{B}};$$

$$a_0x = -\frac{1}{3}a_1 - \alpha\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \alpha\sqrt[3]{A - \sqrt{B}};$$

$$a_0x = -\frac{1}{3}a_1 - \alpha^2\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \alpha^2\sqrt[3]{A - \sqrt{B}};$$

α est une racine cubique imaginaire de l'unité.

$$A = \frac{1}{27}a_1^3 - \frac{1}{6}a_1a_2a_0 + \frac{1}{2}a_3a_0^2;$$

$$B = A^2 + \left(\frac{a_2a_0}{3} - \frac{1}{9}a_1^2\right)^3.$$

Faisant $a_0 = 0$, il vient : $A = \frac{1}{27}a_1^3$, $B = 0$;

d'où $\qquad x = \infty; \quad x = \frac{0}{0}; \quad x = \frac{0}{0}.$

Pour trouver la véritable valeur du symbole $\frac{0}{0}$, il faut, d'après la règle du calcul différentiel, connaître la valeur de $\frac{dA}{da_0}$ et de $\frac{dB}{da_0}$.

Or $\frac{dA}{da_0} = -\frac{1}{6}a_1a_2 + a_3a_0$, et faisant $a_0 = 0$, on a :

$$\frac{dA}{da_0} = -\frac{1}{6}a_1a_2.$$

On a : $$\frac{dB}{da_0} = 2A\frac{dA_0}{da_0} + \left(a_2a_0 - \frac{1}{9}a_1^2\right)^2 a_2;$$

donc $$\frac{dB}{da_0} = 0.$$

Faisant $z = \frac{\frac{dB}{da_0}}{\sqrt{B}}$, pour $a_0 = 0$, on a $z = \frac{0}{0}$;

d'où

$$\sqrt{B}.\frac{dz}{da_0} + \frac{1}{2}z\,.\,B^{\frac{1}{2}}\frac{dB}{da_0} = \frac{d^2B}{da_0^2};$$

d'où

$$z^2 = \frac{2d^2B}{d^2a^0} - 2\sqrt{B}.\frac{dz}{da^0};$$

faisant $a_0 = 0$, on trouve :

$$z^2 = 4\left[\frac{2}{27}a_3a_1^3 - \frac{1}{2.27}a_2^2a_1^2\right];$$

différentiant la seconde valeur de x d'après a_0, il vient :

$$a_0\frac{dx}{da_0} + x = -\frac{1}{3}\alpha\left[A + \sqrt{B}\right]^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{dA}{da_0} + \frac{dB}{da_0}.B^{-\frac{1}{2}}\right] -$$
$$-\frac{1}{3}\alpha^2\left[\frac{dA}{da_0} - \frac{dB}{da_0}.B^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Faisant $a_0 = 0$, et remplaçant les diverses quantités par les valeurs trouvées ci-dessus, on a, toute déduction faite :

$$x = -\frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} + \sqrt{\frac{1}{4}\frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1}};$$

la seconde valeur s'obtient en changeant le signe du radical ; or ces deux valeurs sont les racines de l'equation

$$a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

C. Q. F. T. Tm.