Note sur la relation entre les deux rayons et la distance des deux centres de deux circonférences, l'une inscrite et l'autre circonscrite au même polygone

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 377-379

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__377_0>

NOTE

Sur la relation entre les deux rayons et la distance des deux centres de deux circonférences, l'une inscrite et l'autre circonscrite au même polygone.

(D'après M. Charles-Gustave-Jacob Jacobi, professeur à Kœnigsberg ; Crelle, t. III, p. 376, an 1828.) (*)

—

I. Euler a le premier indiqué la relation qui existe entre les deux rayons et la distance des deux centres de deux circonférences, l'une inscrite, l'autre circonscrite à un triangle (*Nov. Comm. Petr.*, t. I, 1747—48). D'où l'on déduit avec facilité la proposition réciproque, que lorsque cette relation existe, il est possible d'inscrire à l'une des circonférences un triangle qui soit circonscrit à l'autre circonférence, et cela quel que soit le point de départ du triangle inscrit; et par conséquent quand le problème est possible, la relation existe, et quand le problème est impossible, la relation n'existe pas. (*Voir* t. I, § 19, p. 86).

II. Guidé par des considérations organiques empruntées à Maclaurin et à Braikenridge, M. Poncelet a établi ce théorème général. « Quand un polygone quelconque est à » la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une » autre, il en existe une infinité de semblables qui jouissent » de la même propriété; ou plutôt tous ceux qu'on essayerait » de décrire à volonté, d'après ces conditions, se fermeraient d'eux mêmes et réciproquement, etc. (*Prop. proj.* » p. 361, 1822). »

*) L'illustre auteur des *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, 1829.

III. Nicolas Fuss, auteur d'un éloge d'Euler, prononcé le 23 oct. 1783, a publié en 1792, dans les *Nova acta Petr.*, quelques nouveaux problèmes sur les *quadrilatères* simultanément circonscriptibles et inscriptibles, et a donné en même temps la relation analytique y relative.

IV. En 1798, le même analyste a inséré, dans les *Nova acta*, un mémoire intitulé *de Polygonis symmetricè irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis.* Il indique les relations analytiques pour des polygones, depuis le triangle jusqu'à l'octogone inclusivement; mais pour des polygones seulement, tels que le diamètre commun aux deux circonférences passe par un sommet du polygone, et le divise par conséquent symétriquement. D'après cette restriction, Fuss croyait que ses solutions n'étaient pas générales. M. Jacobi fait observer que depuis la découverte du théorème de M. Poncelet, ces solutions ont acquis le mérite de la généralité. Car, d'après ce théorème, on peut toujours placer les polygones de manière à satisfaire à la condition voulue par Fuss. Voici les résultats.

$r =$ rayon du cercle inscrit; $R =$ rayon du cercle circonscrit; $a =$ distance des centres, $R + a = p$, $R - a = q$.
Nombre des côtés.

3; $pq = 2r(a+q)$,

4; $(p^2 - r^2)(q^2 - r^2) = r^4$,

5; $p^3q^3 + p^2q^2r(p+q) - pqr^2(p+q)^2 - r^3(p+q)(p-q)^2 = 0$,

6; $3p^4q^4 - 2p^2q^2r^2(p^2+q^2) = r^4(p^2-q^2)^2$,

7; $$2pqr[pq - r(p-q) - 2r^2]\sqrt{(p-r)(p+q)}$$
$$+ 2r[p^2q^2 - r^2(p^2+q^2)]\sqrt{(q-r)(p+q)}$$
$$= \pm[pq - r(p-q)][p^2q^2 + r^2(p^2-q^2)],$$

8; $[r^2(p^2+q^2) - p^2q^2]^4 = 16p^4q^4r^4(p^2-r^2)(q^2-r^2)$.

V. M. Steiner, ayant pour système, et qu'il suit avec beaucoup de bonheur, de tout trouver lui-même, avant de prendre connaissance de ce qu'ont fait les autres, a publié des relations pour des polygones de 4, 5, 6 et 8 côtés (Crelle, t. II, p. 287, 1827); M. Jacobi a vérifié que ses résultats, excepté pour l'octogone étaient identiques avec ceux de Fuss. Il est probable que le résultat très-compliqué de M. Steiner pour l'octogone est fautif; il n'a pas donné le polygone de 7 côtés, le plus difficile de tous les huit.

VI. Le but principal de ce mémoire, est de rattacher la recherche de la *relation* à la théorie des fonctions elliptiques. L'illustre géomètre parvient à ce théorème : « R et r étant » les rayons des deux cercles dont l'un est inscrit et l'autre » est circonscrit à un polygone de n côtés, et a étant la » distance des deux centres ; si l'on détermine π et α par les » équations : $\cos\alpha = \frac{r}{R+r}$; $\pi^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2 - r^2}$, l'on a tou- » jours $\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\pi^2\sin^2\varphi}} = \frac{i}{n}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\pi^2\sin^2\varphi}}$; où i dé- » signe le nombre des tours que fait le polygone dans le » périmètre du cercle, cette équation exprime en même » temps l'équation de condition qui existe entre R, r, a.

VII. Dans le même mémoire, l'auteur donne une construction géométrique pour la multiplication et l'addition des fonctions elliptiques. Nous nous occupons d'une traduction complète de cette production de génie.