TERQUEM

# Théorèmes et problèmes sur les foyers et centres des coniques

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 4 (1845), p. 371-376
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__371_0>

## THÉORÈMES ET PROBLÈMES

*Sur les foyers et centres des coniques.*

( Suite. V. p. 338. )

—

XXVIII. *Théorème.* Le lieu des foyers d'une conique, passant par un point fixe et touchant trois droites dans un même plan, est une ligne du sixième degré.

*Démonstration.* Prenons les données et la notation relatives au théorème XV (p. 307), on a donc l'équation

$$(ty' - ux')^2 + 2un'x' + 2tn'y' + n'^2 - 2n'x'y' = 0, \quad (1)$$

soient $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du foyer, nous avons trouvé :

$$\beta^2 \cos\gamma + \alpha\beta = \frac{2L}{m^2}(2C\cos\gamma - B),$$

$$\alpha^2 \cos\gamma + \alpha\beta = \frac{2L}{m^2}(2A\cos\gamma - B) \text{ (t. II, p. 429)};$$

mais ces valeurs de $\alpha$ et $\beta$ sont relatives au centre placé à l'origine ; dans le cas actuel, il faut remplacer $\alpha$ et $\beta$ par $\alpha - t$ et $\beta - u$, et considérant que $l = l' = 0$, et alors $\frac{4AL}{m^2} = t^2$, $\frac{4CL}{m^2} = u^2$, $\frac{4BL}{m^2} = -2ut - 2n'$; faisant ces substitutions, il vient :

$$\left.\begin{aligned} \alpha u + (2\alpha\cos\gamma + \beta)\, t &= \alpha^2\cos\gamma + \alpha\beta - n' \\ (2\beta\cos\gamma + \alpha)\, u + \beta t &= \beta^2\cos\gamma + \alpha\beta - n' \end{aligned}\right\}. \quad (2)$$

On a de plus :

$$-2den' + f^2 + 2fdu + 2eft = 0, \quad (3)$$

où

$$n' = a + bt + cu,$$

$a$, $b$, $c$ sont des quantités connues, les équations (2) devien-
donc :

$$u(\alpha+c)+t(2\alpha\cos\gamma+\beta+b)=\alpha^2\cos\gamma+\alpha\beta-a,$$
$$u(2\beta\cos\gamma+\alpha+c)+t(\beta+b)=\beta^2\cos\gamma+\alpha\beta-a;$$

d'où

$$\frac{u}{M}=\frac{t}{N}=\frac{1}{P},\quad P=2(\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma+\alpha^2+b\beta+c\alpha),$$
$$M=\beta(\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma+\alpha^2)+b(\beta^2-\alpha^2)-2a\alpha,$$
$$N=\alpha(\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma+\alpha^2)+c(\alpha^2-\beta^2)-2a\beta.$$

Mettant la valeur de $n'$ dans l'équation (1), elle prend cette forme :

$$A'u^2+B'ut+C't^2+D'u+E't+F'=0;$$

les coefficients sont connus; remplaçant ensuite $u$ et $t$ par les valeurs trouvées, on obtient une équation du sixième degré en $\alpha$ et $\beta$, et qui est le lieu des foyers

*Observation.* Lorsque $\gamma=\frac{1}{2}\pi$, les équations (2) se réduisent à une seule équation ; mais les valeurs qu'on a trouvées pour $t$ et $u$ subsistent toujours; parce qu'on a divisé par $\cos\gamma$ les deux termes de la fraction qui donne la valeur soit de $\alpha$, soit de $\beta$; on peut d'ailleurs arriver directement à ce résultat, en soustrayant les équations (2) membre à membre, l'une de l'autre, et on obtient :

$$2\beta u-2\alpha t=\beta^2-\alpha^2; \qquad (4)$$

équation qui ne dépend pas de $\gamma$.

XXIX. *Théorème* Le lieu des foyers d'une conique touchant quatre droites données est une ligne du troisième degré.

*Démonstration.* Même système de coordonnées que dans le paragraphe précédent; le lieu des centres est une droite, soit $a'+b't+c'u=0$, l'équation de cette droite (p. 308), remplaçant $t$ et $u$ par leurs valeurs, il vient :

$$\left.\begin{array}{l}(\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma+\alpha^2)(c^2\beta+b'\alpha)+(\beta^2-\alpha^2)(cb'-b'c)-\\ -2a\alpha c'-2a\beta b'+2a'(\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma+\alpha^2+b\beta+c\alpha)=0,\end{array}\right\}\quad(5)$$

équation du troisième degré, lieu des foyers.

La courbe passe par l'origine, c'est-à-dire par l'intersection de deux côtés du quadrilatère ; elle passe donc également par les cinq autres points d'intersections, ce qu'on pouvait prévoir. Car, chaque diagonale représente une conique satisfaisant à la question, et ayant son centre au milieu de la diagonale, et ses foyers aux extrémités.

La courbe n'a qu'une asymptote, parallèle à la droite des centres ; deuxième espèce d'Euler, et comprenant les sept hyperboles *défectives* de Newton, parmi lesquelles on rencontre la *cissoïde* des anciens et le *folium* de Descartes.

Faisant $\beta^2+2\alpha\beta\cos\gamma+\alpha^2=z^2$, et remplaçant $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ par leurs valeurs, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l}z^2[\beta dd'(f'-e'f)+\alpha ee'(f'd-d'f)+def'^2-d'e'f^2]+\\ +ff'[de'-ed')(\beta^2-\alpha^2)+\beta(ef'-e'f)+\alpha(df'-d'f)]=0.\end{array}\right\}\quad(6)$$

L'équation de la tangente à l'origine est donc

$$y(ef'-e'f)+x(df'-d'f)=0,$$

l'équation de la diagonale qui passe par l'origine est

$$y(df'-d'f)+x(ef'-e'f)=0,$$

ainsi ces deux droites font des angles égaux avec la bissectrice de l'angle des axes ; on peut donc, sans que la courbe soit tracée, mener des tangentes aux six points d'intersection des côtés du quadrilatère.

Passons aux coordonnées polaires, on a $\beta\sin\gamma=z\sin\varphi$, $\alpha\sin\gamma=z\sin(\varphi+\gamma)$ ; d'où

$$\left.\begin{array}{l}z^2[dd'(f'e-e'f)\sin\varphi+ee'(f'd-d'f)\sin(\varphi+\gamma)]+\\ +z[(def'^2-d'e'f^2)\sin\gamma+ff'(de'-ed')\sin(2\varphi+\gamma)]+\\ +ff'[(ef'-fe')\sin\varphi+(df'-fd')\sin(\varphi+\gamma)]=0;\end{array}\right\}\quad(7)$$

équation facile à construire.

*Corollaire*. Lorsque $d = e' = 0$, le quadrilatère devient un parallélogramme et l'équation (6) se réduit à

$$d^2e(\beta^2 - \alpha^2) + \beta e f' - \alpha d' f = 0\,;$$

qui appartient à une hyperbole équilatère concentrique au parallélogramme, et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles du parallélogramme.

XXX. *Théorème*. Le lieu des centres d'une conique ayant un foyer fixe et une corde fixe, est une ligne du troisième degré.

*Démonstration*. Même notation qu'au problème XIX (p. 322) ; $t$ et $u$ étant les coordonnées du centre, on a :

$$t(\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 - 1) = -\mathrm{PN}\,,\quad u(\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 - 1) = -\mathrm{PM}\,,$$
$$\mathrm{M}y' + \mathrm{N}x' + \mathrm{P} = r',\quad \mathrm{M}y'' + \mathrm{N}x'' + \mathrm{P} = r'',$$

ces deux dernières équations donnent $\mathrm{M} = a + b\mathrm{P}$, $\mathrm{N} = c + d\mathrm{P}$,

$$y'x'' - x'y'' = \frac{r'x'' - r''x'}{a} = \frac{x' - x''}{b} = \frac{r''y' - r'y''}{c} = \frac{y'' - y'}{d}\,,$$

et $\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 - 1 = e + f\mathrm{P} + g\mathrm{P}^2$ où $e$, $f$, $g$ représentent des quantités connues ; mettant ces valeurs dans celles de $t$ et $u$, on obtient :

$$\mathrm{P}^2(gt + d) + \mathrm{P}(ft + c) + et = u\,,$$
$$\mathrm{P}^2(gu + b) + \mathrm{P}(fu + a) + eu = 0\,;$$

éliminant

$$f'(cu - at)^2(gt + d) + (cu - at)(bt - du)(ft + c) + et(bt - du)^2 = 0\,,$$

équation du troisième degré, lieu des centres.

Le foyer mobile décrit évidemment une courbe semblable à celle du centre, de dimension double et semblablement située par rapport au foyer fixe.

XXXI. *Théorème* Le lieu du centre d'une conique ayant un foyer fixe et une corde fixe, passant par ce foyer, est une conique

*Demonstration*. Même notation qu'au problème XIX

(p. 322); et prenons la corde fixe pour axe des $x$; faisons $y=0$ dans l'équation (1) de la page 323, on a.

$$x^2(1-N^2)-2PNx-P^2=0;$$

mais les racines de cette équation sont $x'$ et $x''$, ainsi P et N sont des quantités connues; on a

$$t=-\frac{PN}{M^2+N^2-1},\ u=-\frac{PM}{M^2+N^2-1};$$

éliminant M, on obtient $N^2u^2+t^2(N^2-1)+PNt=0$, conique dont le centre est au foyer fixe et le foyer mobile décrit une conique semblable et semblablement située par rapport au foyer fixe.

*Corollaire.* Dans l'hyperbole, on peut avoir $x''=\infty$, alors $N^2=1$, et la conique devient une parabole.

XXXII. *Théorème.* Le lieu des foyers d'une conique passant par les extrémites d'un diametre fixe, et ayant un axe principal constant de grandeur, est une conique.

*Démonstration.* Prenons le centre pour origine, le diamètre fixe de longueur $2d$ pour axe des $x$, et les coordonnées rectangulaires :

1° Ellipse, et $2b$ le petit axe principal donne; $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du foyer; l'équation de l'ellipse est

$Ay^2+Bxy+Cx^2+F=0$, donc $Cd^2+F=0$, ou $4CLd^2+4FL=0$,

donc $$-\frac{l'}{m}d^2+\frac{n^2}{m^2}-\frac{ll'}{m^2}=0\ (1),\ (\text{t. I, p. 490}),$$

on a de plus.

$$\alpha^2=-\frac{l}{m}-b^2,\ \beta^2=-\frac{l'}{m}-b^2,\ (\text{t. II, p 430})\ \text{et}\ \alpha\beta=\frac{n}{m},$$

(t. II, p. 429).

Éliminant entre ces trois equations et l'équation (1), $\frac{l}{m}$, $\frac{l'}{m}$, $\frac{n}{m}$, il vient, toute reduction faite :

$$\alpha^2b^2+\beta^2(b^2-d^2)=b^2(d^2-b^2)$$

lieu des foyers ; on a essentiellement $a > b$, donc ce lieu est une hyperbole, concentrique aux ellipses :

2° Ellipse, et $2a$ le grand axe principal donné; alors

$$\alpha^2 = \frac{l'}{m} + a^2, \quad \beta^2 = \frac{l}{m} + a^2, \quad \alpha\beta = \frac{n}{m};$$

éliminant $\frac{l'}{m}, \frac{l}{m}, \frac{n}{m}$, entre ces équations et l'équation (1), il vient $\alpha^2(a^2 - d^2) + a^2\beta^2 = a^2(a^2 - d^2)$; on $a > d$; donc le lieu est une ellipse.

3° Hyperbole ; si l'axe $2b$ qui ne rencontre pas est donné, il suffit de changer $+b^2$ en $-b^2$, et l'équation du lieu cherché est $\alpha^2 b^2 + \beta^2(b^2 + d^2) = b^2(b^2 + d^2)$ ; c'est celle d'une ellipse. Si l'axe focal $2a$ est donné, l'équation du lieu est $a^2(a^2 - d^2) + \alpha^2\beta^2 = a^2(a^2 - d^2)$, on a essentiellement $a < d$; ainsi le lieu cherché est une hyperbole

On peut avoir $d = \infty$ ; c'est alors une asymptote qui est donnée ; le lieu du foyer est une droite parallèle à l'asymptote, si l'axe qui ne rencontre pas est donné, et une droite perpendiculaire à l'asymptote, si l'axe focal est donné.

*Remarque* I. C'est le problème du concours général (p. 369), je ne sais pourquoi on a restreint le sujet à l'ellipse et à l'axe focal seulement. Quant aux sommets, nous en parlerons plus loin.

*Remarque* II. Si, au lieu de donner un axe principal, on donne le produit des axes principaux ou la somme algébrique de leurs carrés, le lieu du foyer est une ligne du quatrième degré et dans le dernier cas, une *cassinoïde*, concentrique aux coniques et ayant ses foyers sur le diamètre perpendiculaire au diametre fixe, et dans le premier cas l'équation du lieu est

$$d^2\alpha^2\beta^2 + s^4 d^2(\alpha^2 - \beta^2) = s^4(d^4 - s^4),$$

$s^2$ est le produit des carrés des demi-axes principaux.

(*La suite prochainement.*)