Grand concours de 1845. Questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 369-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__369_0>

GRAND CONCOURS DE 1845. (*V.* t. III, p. 377).

QUESTIONS PROPOSÉES.

—

Mathématiques spéciales.

Étant donné un cercle, et un point situé dans son intérieur, on imagine que sur chacun des diamètres de ce cercle, on décrive une ellipse qui ait ce diamètre pour grand axe, et qui passe par le point donné; on demande 1° l'équation générale de ces ellipses; 2° le lieu géométrique de leurs foyers; 3° le lieu des extrémités de leurs petits axes.

Mathématiques élémentaires.

Soient dans un même plan deux cercles qui ne se coupent point, O et O' leurs centres, AB, A'B' leurs diamètres, qui tombent tous deux sur la droite qui passe par les deux centres.

1° On demande de prouver qu'il existe sur cette droite, deux points C et D, tels que le produit de leurs distances au centre de chaque cercle est égal au carré du rayon de ce cercle, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathrm{OC.OD} = \overline{\mathrm{OA}}^2, \qquad \mathrm{O'C.O'D} = \overline{\mathrm{O'A'}}^2.$$

2° Soit comme dans la figure le cas où l'un des cercles O tombe en dedans de l'autre O'; on peut d'un point P pris sur le diamètre AB du cercle intérieur, élever à ce diamètre une perpendiculaire qui rencontre les deux cercles en M et M' : or si l'on considère les distances de ces points à l'un ou à l'autre des deux points C et D ci-dessus déterminés, et par exemple au point C, on demande de prouver que le rapport de ces distances est constant, quelle que soit la position du point P, et que le carré de ce rapport est égal au rapport des distances du point C aux centres des deux cercles, c'est-à-dire, que l'on a

$$\frac{\overline{CM}^2}{\overline{CM'}^2}=\frac{CO}{CO'}.$$