NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. M. PAIGNON

Propriété du foyer de la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 363-365

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__363_0>

PROPRIÈTÉ DU FOYER DE LA PARABOLE.

PAR M. F. M. PAIGNON.

—

Si par le foyer d'une parabole, on mène une perpendiculaire à son axe et que l'on prenne, à partir du foyer, sur cette perpendiculaire, deux distances égales, le trapèze formé en abaissant de ces points des perpendiculaires sur les tangentes est constant.

L'équation de la parabole étant

$$y^2 = 2px,$$

l'équation d'une tangente au point (x', y') sera

$$yy' = p(x + x').$$

La perpendiculaire δ abaissée du foyer sur cette tangente aura pour expression

$$\delta = \frac{p(p + 2x')}{2\sqrt{p^2 + y'^2}}.$$

Appelons $2b$ la distance des deux points pris sur la perpendiculaire à l'axe passant par le foyer ; la hauteur δ' du trapèze sera la projection de la ligne $2b$ sur la tangente ; on aura donc

$$\delta' = \frac{2pb}{\sqrt{p^2 + y'^2}},$$

on trouvera par conséquent pour la surface du trapèze

$$\delta\delta' = pb,$$

expression indépendante des coordonnées x', y' et qui démontre le théorème énoncé.

Cette propriété caractérise la parabole. En effet si l'on cherche généralement quelle est la courbe telle que le trapèze compris entre la ligne qui joint deux points donnés, la tangente et les perpendiculaires abaissées de ces points sur la tangente, soit équivalent à un carré donné m^2, on trouve pour solution la parabole.

En prenant pour axes la droite qui joint les deux points donnés et la perpendiculaire élevée en son point milieu, l'équation différentielle de la courbe cherchée sera :

$$\frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}} \times \frac{2b}{\sqrt{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}} = m^2,$$

on en déduit en posant

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

$$y = px + \frac{m^2}{2b}(1+p^2).$$

Différentiant, on a

$$\left(x + \frac{m^2}{b}p\right) dp = 0,$$

équation à laquelle on pourra satisfaire de deux manières :

1° En posant

$$dp = 0,$$

d'où

$$p = k;$$

(k désignant une constante arbitraire), et par suite

$$y = kx + \frac{m^2}{2b}(1 + k^2),$$

intégrale générale qui représente un système de lignes droites;

2° En posant

$$x + \frac{m^2}{b}p = 0,$$

solution singulière qui donne en intégrant

$$x^2 = \frac{2m^2}{b}\left(\frac{m^2}{2b} - y\right),$$

équation qui démontre le théorème énoncé. On démontrerait d'une manière analogue la proposition suivante et sa réciproque.

Si l'on prend sur l'axe d'une parabole et à partir du foyer deux distances égales, et que des points ainsi obtenus, on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes, on formera un trapèze dont la surface variera en raison inverse de la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'axe, qui sera par conséquent minimum, quand on considérera la tangente au sommet, et qui n'aura pas de maximum.

Note. Ces propriétés sont des conséquences directes de cette proposition. L'aire d'un trapèze est double de l'aire du triangle qui a pour base un côté non parallèle et pour sommet le milieu du côté opposé. Dans le cas actuel ce milieu est sur la tangente au sommet de la parabole et dans les autres coniques il est sur le cercle à diamètre focal. Tm.