NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. EM. CASTEL

Théorème sur le cercle principal de l'ellipse, l'hyperbole et la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 354-360

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__354_1>

THÉORÈME

sur le cercle principal de l'ellipse, l'hyperbole et la parabole.

PAR M. CH. EM. CASTEL,

élève du collége royal de Versailles.

Dans l'ellipse, le cercle décrit sur un rayon vecteur quelconque, comme diamètre, est tangent au cercle principal.

Démonstration géométrique. Soient F, F' (*fig.* 36) les deux foyers de l'ellipse : menons un rayon vecteur quelconque FT. Si nous joignons F'T, et que nous prolongions cette ligne ; qu'en T nous menions la tangente à la courbe, et que du foyer F nous abaissions la perpendiculaire FB sur la tangente ; en la prolongeant jusqu'à la rencontre C de F'T ; le triangle TCF sera isocèle, à cause de la propriété qu'a la tangente d'être bissectrice de l'angle FTC. On aura donc $FB = BC$; d'ailleurs $FO = OF'$; donc la ligne OB est parallèle à F'C. A cause de ce parallélisme, on a donc $FM : MT :: FO : OF'$; donc $FM = MT$; le point M est donc le milieu du rayon vecteur FT, ce sera donc le centre du cercle décrit sur cette droite comme diamètre. D'un autre côté, la ligne OB est egale au demi-grand axe de l'ellipse ; le point B appartient donc au cercle principal, il appartient aussi au cercle décrit sur TF comme diamètre ; puisque l'angle TBF est droit. D'ailleurs, il est situé sur la ligne des centres ; la distance des centres OM est égale à la différence des rayons, donc les deux cercles sont tangents. C. Q. F. D.

Démonstration analytique. Soient x', y' les coordonnées du point T ; cherchons l'équation du cercle décrit sur TF comme diamètre. Ce cercle a pour centre le point M dont les coordonnées sont $\frac{y'}{2}$ et $\frac{x'+c}{2}$, c étant l'abscisse du foyer. D'ailleurs, le rayon de ce cercle est MF ; son carré est donc égal à $\frac{y'^2}{4} + \frac{(c-x')^2}{4}$; on a donc pour l'équation de ce cercle :

$$\left(y - \frac{y'}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{x'+c}{2}\right)^2 = \frac{y'^2}{4} + \frac{(c-x')^2}{4}$$

ou

$$y^2 + x^2 - yy' - x(x'+c) + \frac{(c+x')^2 - (c-x')^2}{4} = 0,$$

$$y^2 + x^2 - yy' - x(x'+c) + cx' = 0. \qquad (1)$$

Combinons cette équation avec $x^2+y^2=a^2$ (2), afin d'avoir l'intersection du cercle qu'elle représente avec le cercle principal ; retranchons les deux équations l'une de l'autre, il vient :

$$yy'+x(x'+c)-cx'=a^2\,;$$

d'où l'on tire :

$$y'=\frac{a^2+cx'-x(x'+c)}{y'}\,,$$

et en portant cette valeur dans l'équation (2), on aura, pour l'équation que donnent les x d'intersection :

$$x^2+\frac{(a^2+cx')^2+x^2(x'+c)^2-2x(x'+c)(a^2+cx')}{y'^2}=a^2\,,$$

$$x^2[y'^2+(x'+c)^2]-2x(c+x')(a^2+cx')+(a^2+cx')^2-a^2y'^2=0 \quad (3).$$

Examinons l'expression du binôme B^2-4AC ; nous aurons pour ce binôme.

$$(c+x')^2(a^2+cx')^2-[y'^2+(c+x')^2][(a^2+cx')^2a^2y'^2]$$

ou

$$y'^2[a^2y'^2+a^2(c+x')^2-(a^2+cx')^2]$$

ou

$$y'^2(a^2y'^2+a^2x'^2+a^2c^2-a^4-c^2x'^2)\,, \qquad (4)$$

$$y'^2(a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2)\,, \qquad (5)$$

quantité qui est nulle, puisque le point x', y' se trouve sur l'ellipse. Le premier membre de l'équation (3) est donc un carré parfait ; les deux racines sont donc égales, et par conséquent les deux cercles sont tangents. C. Q. F. D.

Scolie. Remarquons que pour passer de l'ellipse au cas de l'hyperbole, on aurait absolument les mêmes calculs à faire ; seulement c^2 ne serait plus a^2-b^2, mais a^2+b^2 ; en remplaçant c^2 par cette valeur dans le polynôme (4), on obtient :

$$y'^2(a^2y'^2-b^2x'^2-a^2b^2).$$

La quantité entre parenthèses n'est autre chose que l'équation de l'hyperbole ayant a et b pour axes, dans laquelle x et y ont été remplacés par x' et y'. Si donc on suppose que le point x', y' appartient à l'hyperbole, cette quantité sera nulle. L'équation (3) aura donc aussi ses racines égales dans le cas de l'hyperbole, et par conséquent le cercle construit sur le rayon vecteur du point, est encore tangent au cercle qui a l'origine pour centre, et pour rayon le demi-axe a.

Corollaire. Soit F, F (*fig.* 37) les deux foyers, T un point de l'ellipse ; menons les deux rayons vecteurs FT, F'T ; et sur ces deux rayons vecteurs, comme diamètres, décrivons deux cercles qui seront tangents au cercle principal en C et en E. Aux points E et C menons les tangentes BD, DC au cercle principal, et joignons le point D, où ces tangentes se rencontrent, au point T. La ligne DT prolongée devra passer par le deuxième point d'intersection K des deux cercles : mais l'angle TKF est un angle droit ; donc la ligne DT est perpendiculaire sur l'axe des x.

On peut remarquer aussi que les trois points E, T, C, c'est-à-dire le point de la courbe et les points de contact du cercle principal avec les cercles décrits sur les deux rayons vecteurs de ce point, comme diamètres, sont en ligne droite.

En effet, les perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente à la courbe, ont leurs pieds sur le cercle principal ; ces pieds doivent aussi se trouver sur les cercles qui ont pour diamètres les deux rayons vecteurs du point T ; ils se trouvent donc à la rencontre de ces cercles avec le cercle principal. Réciproquement les points de rencontre sont les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente au point T ; ils se trouvent donc sur cette tangente ; par conséquent ces points de rencontre et le point T sont en ligne droite.

Hyperbole. Nous avons étendu à l'hyperbole la démonstration analytique que nous avions donnée pour l'ellipse. On peut aussi donner pour cette courbe une démonstration géométrique.

Menons les deux rayons vecteurs FT, F'T (*fig* 38) d'un même point, et en ce point menons la tangente à la courbe. Elle coupera en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs. Si donc nous abaissons du foyer F une perpendiculaire sur cette tangente, en la prolongeant jusqu'à la rencontre de F'T, nous aurons FB = BC. D'ailleurs, OF=OF'; donc la ligne OB est parallèle à F'T ; elle divisera donc aussi en deux parties égales le rayon vecteur FT ; le point M où elle rencontre le rayon vecteur est donc le centre du cercle décrit sur ce rayon comme diamètre. Ce cercle passera en B. Comme OB est égal à la moitié de F'C, c'est-à-dire à a, le cercle principal passera aussi en B. La distance des centres de ces deux cercles est OM, les deux rayons OB et BM ; la la distance des centres est donc égale à la somme des rayons, donc les deux cercles sont tangents. C. Q. F. D.

On peut faire ici la même remarque que sur l'ellipse. Les tangentes au cercle principal, menées aux points de rencontre de ce cercle avec les deux autres, se coupent en un point qui est situé sur l'ordonnée du point T prolongée.

De plus, les points de contact des cercles se trouvent sur la tangente au point T.

Parabole. Enfin le même théorème s'étend aussi à la parabole. Mais alors le rayon du cercle principal est devenu infini ; la circonférence de ce cercle s'est transformée en une tangente à la courbe, au point où l'axe la coupe. Si l'on prend cette tangente pour axe des y, on pourra dire encore · que le cercle décrit sur un rayon vecteur quelconque, comme diamètre, est tangent à l'axe des y.

Démonstration géométrique. On sait que le pied de la perpendiculaire, abaissée du foyer sur la tangente, se trouve sur l'axe des y. Soit donc (*fig* 39) B le point où la tangente en un point quelcon que T coupe l'axe des y ; le cercle décrit sur le rayon vecteur FT, comme diamètre, passera par le point B. D'ailleurs, on sait que la hauteur AB est égale à la demi-ordonnée du point T ; si donc par le point B on mène une perpendiculaire à l'axe des y, elle ira passer par le milieu N de l'ordonnée TK ; par suite par le milieu du rayon vecteur TF, c'est-à-dire par le centre du cercle. Donc réciproquement le rayon MB est perpendiculaire sur l'axe des y ; donc le cercle est tangent à cet axe. C. Q. F. D.

Démonstration analytique. Soit

$$y^2 = 2px$$

l'équation de la parabole. Menons le rayon vecteur d'un point x', y', et cherchons l'équation du cercle décrit sur ce rayon vecteur comme diamètre. Ce centre a pour centre un point dont les coordonnées sont $\frac{y'}{2}$ et $\frac{x'}{2}+\frac{p}{4}$; le carré de son rayon est $\frac{y'^2}{4}+\left(\frac{x'}{2}-\frac{p}{4}\right)^2$; son équation sera donc

$$\left(y-\frac{y'}{2}\right)^2+\left(x-\frac{2x'+p}{4}\right)^2=\frac{y'^2}{4}+\frac{(2x'-p)^2}{16},$$

ou en développant, et faisant $x=0$, afin d'avoir l'intersection du cercle avec l'axe des y,

$$y^2-yy'+\frac{(2x'+p)^2-(2x'-p)^2}{16}=0,$$

$$y^2-yy'+\frac{px'}{2}=0.$$

Or on a $y'^2=2px'$; d'où $px'=\frac{y'^2}{2}$, l'équation devient donc :

$$y^2-yy'+\frac{y'^2}{4}=0.$$

Le premier nombre est un carré ; les racines sont donc égales ; donc le cercle est tangent à l'axe des y. C. Q. F. D.

Note. Soit O l'origine des coordonnées rectangulaires d'une courbe algébrique plane, et M l'un des points de cette courbe ; quelle est l'enveloppe du cercle décrit sur OM comme diamètre? L'intersection de ce cercle avec la tangente en M est évidemment le point de contact du cercle avec son enveloppe. Car le point infiniment voisin de M est encore sur la tangente ; ainsi l'enveloppe cherchée est donc aussi le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes. Or, dans le théorème ci-dessus, on sait que le lieu est le cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre ; donc, etc. (voir t. II, p. 436). Tm.