Nouvelles annales de mathématiques

A. Descos

Théorème sur les polaires des courbes du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 352-354

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__352_1>

THÉOREME

sur les polaires des courbes du second degré.

PAR A. DESCOS,
Élève externe du Collége Louis-le-Grand.

Sur le plan d'une ligne du second ordre on donne trois points, non en ligne droite; on construit les polaires de chacun de ces points par rapport à la courbe : ces polaires formeront par leurs intersections un triangle : on joint chacun des sommets du triangle au pôle du côté opposé; les trois droites ainsi menées se coupent en un même point.

Soient A′, B′, C′ (*fig.* 43) les trois points donnés. BC, AC, AB, leurs polaires : il faut démontrer que AA′, BB′, CC′ passent en un même point.

Soit $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$ l'équation de la courbe, rapportée aux axes AB, AC, les deux coordonnées du point C′ pôle de la droite dont l'équation est

$$y=0,$$

sont :

$$C'\begin{cases} x''' = \dfrac{DE-2BF}{BE-2CD} \\ y''' = \dfrac{4CF-E^2}{BE-2CD} \end{cases}$$

Les deux coordonnées du point B′ pôle de la droite dont l'équation est

$$x=0,$$

sont :

$$\mathrm{B}'\begin{cases} x''=\dfrac{4\mathrm{AF}-\mathrm{D}^2}{\mathrm{BD}-2\mathrm{AE}} \\[2mm] y''=\dfrac{\mathrm{DE}-2\mathrm{BF}}{\mathrm{BD}-2\mathrm{AE}} \end{cases}$$

Je mène maintenant une droite arbitraire BC non parallèle aux axes ; l'équation de cette droite sera :

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{c}=1, \quad \text{ou} \quad y=-\frac{b}{c}x+b.$$

Ainsi on aura, pour déterminer x', y' coordonnées du pôle de la droite, les deux équations

$$\frac{\mathrm{B}y'+2\mathrm{C}x'+\mathrm{E}}{2\mathrm{A}y'+\mathrm{B}x'+\mathrm{D}}=\frac{b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{D}y'+\mathrm{E}x'+2\mathrm{F}}{2\mathrm{A}y+\mathrm{B}x'+\mathrm{D}}=-b,$$

ou bien

$$(2\mathrm{A}b-\mathrm{B}c)y'+(\mathrm{B}b-2\mathrm{C}c)x'=\mathrm{E}e-\mathrm{D}b,$$
$$(2\mathrm{A}b+\mathrm{D})y'+(\mathrm{B}b+\mathrm{E})x'=-\mathrm{D}b-2\mathrm{F};$$

d'où l'on tire :

$$\mathrm{A}'\begin{cases} x'=\dfrac{(2\mathrm{AE}b+\mathrm{DE}-\mathrm{BD}b-2\mathrm{BF})c-(\mathrm{D}^2-4\mathrm{AF})b}{k} \\[2mm] y'=\dfrac{(\mathrm{DE}-2\mathrm{BF})b-(\mathrm{E}^2-4\mathrm{CF}-2\mathrm{CD}b+\mathrm{BE}b)c}{k} \end{cases} \quad (*).$$

Formons les équations des droites CC′, AA′, BB′, nous aurons :

$$\mathrm{CC}'\ldots(\mathrm{DE}-2\mathrm{BF})y+[\mathrm{E}^2-4\mathrm{CF}+b(\mathrm{BE}-2\mathrm{CD})]x=b(\mathrm{DE}-2\mathrm{BF}),$$
$$\mathrm{BB}'\ldots[\mathrm{D}^2-4\mathrm{AF}+c(\mathrm{BD}-2\mathrm{AE})]y+(\mathrm{DE}-2\mathrm{BF})x=c(\mathrm{DE}-2\mathrm{BF}),$$
$$\mathrm{AA}'\ldots[(2\mathrm{AE}b+\mathrm{DE}-\mathrm{BD}b-2\mathrm{BF})c-(\mathrm{D}^2-4\mathrm{AF})b]y,$$
$$-[(\mathrm{DE}-2\mathrm{BF})b-(\mathrm{E}^2-4\mathrm{CF}-2\mathrm{CD}b+\mathrm{BE}b)c]x=0.$$

(*) Ces coordonnées sont calculées symetriquement, t. II, p. 304, XIX. Tm.

En multipliant la première équation par c, la seconde par b, et retranchant la seconde de la première, on trouve la troisième : donc l'une des équations est une conséquence des deux autres ; les trois équations admettant une solution commune, les droites qu'elles représentent se coupent au même point.

Remarque. Ce théorème généralise la propriété connue du triangle circonscrit à une courbe du second degré.

Note. Ce théorème est un cas particulier de cet autre théorème énoncé par M. Chasles (Gergonne, t. XIX, p. 65) : — Si par rapport à une même surface du second degré on prend les pôles des trois faces d'un angle trièdre, les plans conduits par ses arêtes et les pôles des faces respectivement opposées se coupent tous trois suivant la même droite.

En combinant le théorème de M. Descos avec la théorie des polaires et l'hexagramme de Pascal, on conclut que le système des côtés des triangles ABC, A'B'C' se coupant en neuf points, excluant les sommets ; les trois points donnés par les intersections des côtés AB, A'B' ; AC, A'C', BC, B'C' sont sur une même droite, et les six autres points sur une même conique.

Tm.