GÉRONO

Des racines infinies. Des équations algébriques. Asymptotes rectilignes aux courbes que ces équations représentent

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 33-52

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__33_0>

DES RACINES INFINIES

Des équations algébriques. — Asymptotes rectilignes aux courbes que ces équations représentent (*).

—

Quelle que soit la direction d'une droite asymptote à une courbe algébrique, qu'elle soit parallèle ou non parallèle à l'axe des ordonnées, pour trouver les valeurs des coefficients qui déterminent l'équation de cette droite, on est toujours conduit à considérer des équations à deux variables auxquelles il faut satisfaire par des solutions composées d'une valeur réelle et finie pour l'une des variables, et d'une valeur infinie et *réelle* de l'autre. C'est ce que nous allons démontrer.

Parmi les différentes définitions qu'on a données d'une asymptote rectiligne, j'adopterai la suivante :

Une droite est asymptote à une courbe, lorsque la courbe se rapproche indéfiniment de cette droite à partir d'un de

---

(*) Plusieurs observations m'ont été communiquées au sujet de mes deux premiers articles (tome III, pages 32 et 85), sur les racines infinies des équations algébriques. Peu différentes, au fond, ces observations s'accordent parfaitement sur un point. Dans un des articles dont il s'agit, il a été dit que : la détermination des asymptotes rectilignes dépend uniquement de la résolution d'équations à deux variables, en valeurs réelles dont l'une serait infinie. C'est ce qu'on ne trouve pas suffisamment expliqué.

Les personnes qui ont bien voulu me faire savoir que de nouveaux développements à cet égard leur sembleraient utiles, pourront en lisant ce 3e article, reconnaître dans les détails mêmes où je suis entré, tout le prix que j'attache à leur obligeante communication.

Afin d'être mieux compris des élèves, il m'a semblé convenable de reprendre à son origine la théorie des asymptotes. Un autre motif m'a aussi déterminé à ne pas craindre de trop insister sur quelques points de cette théorie : c'est l'intention de contribuer, autant qu'il me serait possible, à rendre plus faciles, plus précises, les objections de ceux qui ne partageraient pas mon avis sur la question que j'examine. G.

ses points, et peut s'en rapprocher aussi près qu'on le voudra sans jamais l'atteindre, à quelque distance que les deux lignes soient prolongées l'une et l'autre

De cette définition il résulte que : si une courbe a une asymptote rectiligne, on pourra en prolongeant suffisamment les deux lignes, trouver sur la courbe un point dont la distance à la droite sera moindre qu'une quantité donnée, quelque petite que soit cette quantité; et si l'on continue à prolonger les deux lignes, les points successifs de la courbe, à partir du point obtenu, se rapprocheront de plus en plus de la droite.

Pour qu'une courbe ait une asymptote, il faut qu'elle ait au moins une branche qui puisse s'étendre jusqu'à l'infini. Cette condition est évidemment nécessaire, mais elle n'est pas suffisante.

L'hyperbole du second degré a deux asymptotes rectilignes, la parabole n'en a aucune. Je cite à dessein ces exemples afin d'éviter toute espèce d'équivoque, car je sais que, dans un autre ordre d'idées, dont je n'ai pas l'intention de m'occuper, on a trouvé, en étendant la définition des asymptotes, que la parabole a aussi des asymptotes rectilignes.

En recherchant les équations des asymptotes, je suivrai exactement dans le calcul la définition de ces droites. Je supposerai d'abord qu'elles ne soient pas parallèles à l'axe des ordonnées; leurs équations seront de la forme $y=cx+d$, les coefficients c, d, ayant des valeurs finies. L'équation de la courbe sera représentée par $y=f(x)$, en supposant cette équation resolue par rapport à l'ordonnée y. L'expression $f(x)$, pourra prendre une ou plusieurs valeurs différentes pour chaque valeur attribuée à l'abscisse x.

Si la droite $y=cx+d$ est asymptote à la courbe $y=f(x)$, il faudra que, pour une valeur α de x, suffisamment grande, la différence, $cx+d-f(x)$, entre les ordonnées des deux lignes, correspondantes à une même abscisse, devienne moindre que toute quantité déterminée δ; et si l'on donne à x des valeurs croissantes à partir de α, la différence $cx+d-f(x)$, déjà moindre que δ, ira continuellement en diminuant.

Or l'expression $cx+d-f(x)$ peut être mise sous la forme du produit $x\left[c+\frac{d}{x}-\frac{f(x)}{x}\right]$. Le premier facteur x augmentant, à partir de α, le second facteur $c+\frac{d}{x}-\frac{f(x)}{x}$, devra diminuer continuellement, puisque la valeur du produit diminue. Enfin, lorsque $x=\infty$, le facteur $c+\frac{d}{x}-\frac{f(x)}{x}$ devra s'annuler, sans quoi le produit serait lui-même infini.

D'ailleurs, à cette limite, le terme $\frac{d}{x}$ du facteur $c+\frac{d}{x}-\frac{f(x)}{x}$ est nul, car la valeur de d est supposée finie. Alors, on a $c-\frac{f(x)}{x}=0$, d'où $c=\frac{f(x)}{x}$; et par conséquent $c=\frac{y}{x}$, puisque $y=f(x)$.

La courbe considérée ne peut donc avoir une asymptote non parallèle à l'axe des ordonnées, qu'autant que le rapport $\frac{y}{x}$ de l'ordonnée à l'abscisse des points de l'une de ses branches, tende vers une limite finie pour des valeurs de x indéfiniment croissantes. Et si, cette condition étant remplie, l'asymptote existe réellement, le coefficient d'inclinaison de cette droite sur l'axe des abscisses doit être égal à la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{y}{x}$, et qu'il atteint seulement lorsque l'abscisse devient infinie.

D'après cela, pour trouver les limites de $\frac{y}{x}$ correspondantes à $x = \infty$, je nomme c le rapport variable $\frac{y}{x}$ de l'ordonnée à l'abscisse d'un point quelconque de la courbe, dont l'équation sera maintenant représentée sous cette forme générale $f(x, y) = 0$. L'égalité $\frac{y}{x} = c$, donne $y = cx$, et en remplaçant y par cx dans $f(x, y) = 0$, on a l'équation $f(x, cx) = 0$, qui détermine pour chaque point de la courbe, la relation qui existe entre l'abscisse et le rapport $\frac{y}{x}$ de l'ordonnée à l'abscisse. C'est donc parmi les valeurs finies de la variable c, correspondantes aux valeurs infinies *réelles* de x, et satisfaisant à l'équation $f(x, cx) = 0$, qu'il faut chercher les coefficients de l'inclinaison sur l'axe des abscisses, des asymptotes non parallèles à l'axe des ordonnées.

En supposant que $f(x, y)$, soit une fonction algébrique et entière, il en sera de même de $f(x, cx)$; et l'équation $f(x, cx) = 0$, développée suivant les puissances entières et décroissantes de x prendra la forme :

$$Ax^m + Bx^n + Cx^p + \text{etc.} = 0.$$

Les coefficients A, B, C, etc., seront des fonctions entières de c, et premières entre elles (*).

Pour obtenir les valeurs réelles de c correspondantes aux valeurs infinies de x, il faudra d'abord déterminer les racines réelles c', c'', etc., de l'équation $A = 0$; il restera ensuite à examiner si les valeurs de x correspondantes aux racines c', c'',.. sont infinies *réelles*. Si l'une des racines c'

(*) Je suppose ici qu'on ait débarrassé les coefficients A,B, etc., de leur plus grand commun diviseur. — Dans le cas particulier où les coefficients dont il s'agit ont un commun diviseur fonction de la variable c, le premier membre de $f(x,y) = 0$, admet au moins un diviseur de la forme $y - cx$; en tenant compte de ce facteur qui represente une droite si la quantite c est réelle, on en débarrasse l'equation $f(x,y) = 0$, dont le degre s'abaisse ainsi d'une unite.

de $A = 0$, est simple ou multiple d'ordre impair, la valeur infinie de x, correspondante à c', sera toujours réelle (*Voy.* t. III, p. 87). Dans ce cas, la courbe $f(x, y) = 0$, aura au moins une branche infinie. En effet, on pourra donner à la variable c, une valeur $c' + h$ ou $c' - h$, assez peu différente de c', pour que la valeur correspondante de x, dans l'équation $f(x, cx) = 0$, soit réelle et plus grande qu'une quantité déterminée α; et si l'on fait converger la quantité $c' + h$, ou $c' - h$, vers c', par la diminution progressive de h, la valeur correspondante de x, ira continuellement en augmentant, à partir de α (p. 87, t. III). En remplaçant c et x, par ces valeurs dans $y = cx$, l'ordonnée y restera constamment réelle, et par conséquent on obtiendra des points de la courbe, aussi éloignés de l'axe des y, que l'on voudra. C'est-à-dire que la courbe sera illimitée dans le sens des abscisses. Elle sera de même illimitée dans le sens des ordonnées, si la racine c' n'est pas nulle, car le produit $(c' \pm h)\alpha$, peut devenir plus grand que toute quantité donnée.

On peut encore observer que les solutions réelles de l'équation $Ax^m + Bx^n + Cx^p + \text{etc.} = 0$, determinent les points de rencontre de la courbe proposée $f(x, y) = 0$, et des droites représentées par l'equation $y = cx$. Lorsqu on fait converger la variable c vers c', la droite mobile $y = cx$, tourne autour de l'origine des coordonnées, pour se rapprocher indéfiniment de la direction déterminée par $y = c'x$, dans chacune de ses positions, le dernier des points auxquels elle va couper la courbe s'éloigne progressivement de l'axe des y, et la distance de ce point à l'axe des y pouvant surpasser toute grandeur assignable, on voit qu'une branche de la courbe doit s'étendre jusqu'à l'infini dans le sens des abscisses

Mais, il ne faut pas affirmer que la courbe proposée $f(x, y) = 0$, a toujours une branche infinie, lorsque l'équation $A = 0$, a une racine réelle. Car la valeur de x déduite de $Ax^m + Bx^n + Cx^p +$ etc. $= 0$, et correspondante à la racine réelle de $A = 0$, peut être imaginaire. C'est, par exemple, ce qui a lieu pour la courbe dont l'équation est $(y^2 - x^2)^2 + y^2 + x^2 - 1 = 0$. En remplaçant y par cx dans cette équation, on obtient :

$$(c^2 - 1)^2 x^4 + (c^2 + 1) x^2 - 1 = 0.$$

L'équation $A = 0$, devient $(c^2 - 1)^2 = 0$, dont les quatre racines sont réelles ; et *néanmoins*, la courbe proposée $(y^2 - x^2)^2 + y^2 + x^2 - 1 = 0$, est limitée dans le sens des abscisses, puisque les abscisses des points de cette courbe, sont moindres que l'unité, comme il est facile de le reconnaître.

L'assertion que nous réfutons ici, a sa source dans l'énoncé d'un principe d'algèbre qui a été présenté d'une manière incomplète, et capable d'induire en erreur. On a dit : lorsque le coefficient A du premier terme d'une équation $Ax^m + Bx^n +$ etc. $= 0$ devient nul, l'équation a une racine infinie. J'ai déjà fait observer ailleurs (t. III, p. 39), que les raisonnements sur lesquels on veut fonder ce principe, manquent de rigueur, en ce qu'ils supposent que le produit $0 \times \infty$ est toujours nul. Et, lors même qu'on aurait prouvé rigoureusement que si le coefficient A se réduit à zéro, l'équation $Ax^m + Bx^n + \ldots = 0$, a une racine infinie réelle, ou bien une racine imaginaire dont le module est infini, il resterait encore à reconnaître lequel de ces deux cas a lieu, pour l'interprétation géométrique des résultats obtenus. Faute d'avoir distingué ces deux cas on a conclu, à tort, que si l'équation $A = 0$, a des racines réelles, la courbe considérée a nécessairement des branches infinies. Car, non-seulement l'équation donnée $f(x, y) = 0$, peut représenter une courbe limitée, quand les racines de $A = 0$, sont réelles, mais encore il est possible que l'équation $f(x, y) = 0$, ne représente aucune ligne (*).

On ne doit donc admettre pour valeur du coefficient c, dans l'équation $y = cx + d$ de l'asymptote, qu'une racine réelle c', de $A = 0$, correspondante à une valeur *infinie réelle* de x. Cette première condition sera toujours remplie lorsque la racine c' sera simple ou multiple d'ordre impair, en admettant, toutefois, que le facteur $c - c'$ ne soit pas commun à tous les termes de $Ax^m + Bx^n + Cx^p + \text{etc.} = 0$.

Une seconde condition est également nécessaire : c'est qu'il soit possible de trouver pour le coefficient d dans $y = c'x + d$, une valeur d' réelle et finie, correspondante au coefficient c'.

Supposons que la courbe puisse avoir une asymptote rectiligne $y = c'x + d$, dont le coefficient d'inclinaison sur l'axe des x soit c'. La différence $y-(c'x+d)$ entre les ordonnées y et $(c'x + d)$ de ces deux lignes ira continuellement en diminuant et deviendra moindre que toute quantité donnée, lorsque les valeurs attribuées à x seront suffisamment grandes. Par conséquent, la fonction $y-c'x$ des coordonnées y, x, d'un point de la courbe devra, pour les valeurs de x indéfiniment croissantes, tendre vers une limite finie qui sera précisément la valeur de d correspondante à c'. Pour trouver cette limite, nommons d la valeur variable de la fonction $y - c'x$, des coordonnées d'un point quelconque de la courbe ; il en résulte $y = c'x + d$, et en substituant $c'x + d$ à y dans l'équation $f(y, x) = 0$, on obtient la relation $f(c'x + d, x) = 0$, qui a lieu entre l'abscisse x et la fonction d ou $y - c'x$ des deux coordonnées de chaque point de la courbe. Et il restera à déterminer les valeurs réelles et

(*) L'équation $(y^2 - x^2)^2 + x^2 + y^2 + 1 = 0$ en offre un exemple. Cette equation ne représente aucune ligne, et néanmoins, si l'on remplace y par cx, le coefficient de la plus haute puissanee de x devient $(c^2 - 1)^2$, qui est annulé par les valeurs $c = \pm 1$.

finies de la variable d correspondantes aux valeurs *infinies réelles* de x, et satisfaisant à l'équation $f(c'x+d,\ x)=0$.

A cet effet, on ordonnera $f(c'x+d,\ x)$, suivant les puissances décroissantes de x ; l'équation $f(c'x+d,\ x)=0$, se ramènera à la forme $A'x^r+B'x^s+\text{etc.}=0$: les coefficients A', B', etc., étant des fonctions entières de d, et débarrassées de tout facteur commun.

Les valeurs de d que l'on cherche devront être racines de $A'=0$, et correspondre à des valeurs réelles de x, dans l'équation $A'x^r+B'x^s+\text{etc.}=0$.

Réciproquement, si d' est une racine réelle de $A'=0$, qui satisfasse à la condition que nous venons d'indiquer, la droite $y=c'x+d'$, sera asymptote à la courbe proposée $f(x,y)=0$.

Car, si l'on désigne par h une quantité suffisamment petite, en remplaçant l'inconnue d par $d'+h$, dans l'équation $f(c'x+d,\ x)=0$, l'autre inconnue x aura une valeur réelle α, qui sera aussi grande que l'on voudra. Et si l'on fait converger h vers zéro, la valeur de x reste réelle et devient de plus en plus grande (t. III, p. 87). Or l'égalité $d=d'+h$, donne $y-c'x=d'+h$, puisque d remplace dans le calcul $y-c'x$. Il s'en suit : $y=c'x+d'+h$. L'abscisse x restant constamment réelle, pour les valeurs décroissantes de h, il en sera de même de l'ordonnée y, qui est égale à $c'x+d'+h$; on obtient donc des points de la courbe qui s'éloignent indéfiniment de l'axe des y, lorsque h décroît. D'ailleurs, la différence h, entre l'ordonnée y d'un point de la courbe et l'ordonnée $c'x+d'$ du point de la droite $y=c'x+d'$, correspondante à la même abscisse, diminuant au delà de toute grandeur assignable, on voit qu'une branche de la courbe en s'éloignant de l'axe des ordonnées se rapproche indéfiniment de la droite $y=cx'+d'$, et qu'elle peut s'en rapprocher aussi près qu'on le voudra, sans jamais la rencontrer, car h ne deviendra nulle qu'autant que x soit infinie. Par conséquent, la droite $y = c'x + d'$, est asymptote à la courbe $f(x, y) = 0$.

On arrive à la même conclusion en observant que les solutions réelles de l'équation $f(c'x + d, x) = 0$, déterminent les points de rencontre de la courbe $f(y, x) = 0$, et des droites parallèles représentées par l'équation $y = c'x + d$. Lorsque la valeur attribuée au coefficient d est convergente vers d', la droite mobile $y = c'x + d$, se rapproche de la droite $y = c'x + d'$, à une distance $(d' - d)$ qui devient moindre que toute quantité donnée; dans chacune des positions de la droite $y = c'x + d$, elle a avec la courbe, un point commun dont la distance x à l'axe des y, augmente continuellement et sans autre limite que l'infini : une branche de la courbe a donc pour asymptote la droite $y = c'x + d'$.

La détermination des asymptotes rectilignes $y = cx + d$, non parallèles à l'axe des y, dépend uniquement, comme on voit, de la résolution d'équations à deux variables, en valeurs réelles dont l'une soit infinie. Il en est absolument de même des asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées. Car, si la droite $x = \alpha$ est asymptote à la courbe $f(x, y) = 0$, en remplaçant dans l'équation $f(x, y) = 0$, x par $\alpha \pm h$, et donnant à h des valeurs décroissantes et suffisamment petites, il faudra qu'une des valeurs de y reste constamment réelle et augmente au delà de toute grandeur assignable. En d'autres termes, l'équation $f(x, y) = 0$, devra admettre la solution réelle $x = \alpha$, $y = \infty$. Réciproquement, si l'équation $f(x, y) = 0$, admet la solution $x = \alpha$, $y = \infty$, la droite $x = \alpha$, est asymptote à la courbe $f(x, y) = 0$, puisqu'une branche indéfinie de cette courbe s'approche de la droite $x = \alpha$, autant qu'on le voudra et sans jamais l'atteindre.

Et de même encore, on doit observer que pour déterminer les équations des asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées, il ne suffit pas d'obtenir les racines réelles de l'équation formée en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de y dans l'équation de la courbe. Ces racines ne conviennent à la question traitée qu'autant que les valeurs correspondantes de y soient aussi réelles (*). C'est la remarque déjà faite au sujet des équations $A = 0$, $A' = 0$, dans la recherche des asymptotes $y = cx + d$, inclinées sur l'axe des y : les racines c', d', de ces équations peuvent être réelles et finies, sans que la droite $y = c'x + d'$ soit une asymptote.

On a trouvé, en cela, je ne sais quel paradoxe ; et en voulant le résoudre, on a été conduit à une interprétation géométrique dans laquelle l'infini n'est plus considéré comme la limite des quantités croissantes.

Pour ma part, je ne trouve ici rien qui soit paradoxal. Il est inexact de dire que le calcul a donné une asymptote, sans qu'il y ait de courbe. Car, sous le point de vue analytique, la question n'est pas complétement traitée, lorsqu'on a obtenu les racines c', d', des équations $A = 0$, $A' = 0$; il reste encore à considérer les valeurs correspondantes de x. La même observation s'applique, comme on sait, à toutes les questions dont la solution dépend des valeurs réelles de plusieurs inconnues.

Quant à la recherche d'une interprétation geométrique de la droite $y = c'x + d'$, lorsque l'équation proposée $f(x, y) = 0$ ne représente rien, il conviendrait peut-être d'en indiquer d'abord l'utilité. Si elle a pour objet de justifier, d'une manière générale, la conclusion qu'on a voulu déduire de la seule réalité des valeurs de c', d' ; quelque ingénieuse que puisse être, sous d'autres rapports, l'interprétation trouvée, il serait difficile de l'admettre sans faire de concession à un mauvais raisonnement.

(*) En admettant toujours que les coefficients des termes de l'équation $f(x,y) = 0$, aient été débarrassés de tout facteur commun en x.

Je n'entrerai ici dans aucun détail sur les simplifications du calcul qui donne les équations $A=0$, $A'=0$: la plupart des traités élémentaires contiennent à cet égard, des développements suffisants. Je ne parlerai pas non plus du moyen de reconnaître en discutant ces équations, combien la courbe proposée peut avoir d'asymptotes parallèles à une direction déterminée : cette partie de la discussion du problème n'offre aucune difficulté réelle. Le point principal consiste à savoir dans quels cas la solution c', d', des équations considérées, détermine effectivement une asymptote à la courbe ; le reste s'en déduit facilement. Et par conséquent, tout se réduit en définitive à cette question d'algèbre, que déjà nous avons en partie examinée :

L'équation $Ay^m + By^n + Cx^p + \ldots = 0$, à deux inconnues y, x, ordonnée suivant les puissances décroissantes de y, a pour coefficients, A, B, C, etc., des fonctions entières de x et premières entre elles : trouver les racines réelles et finies de $A=0$, correspondantes à une valeur infinie et réelle de l'inconnue y.

9. On a démontré (t. III, p. 87), que si la racine réelle α de $A=0$, est *simple* ou multiple d'ordre impair, la valeur correspondante de y est réelle ; il reste à examiner ce qui a lieu lorsque le plus haut degré de multiplicité de la racine α est un nombre pair $2r$.

Je ferai d'abord abstraction du cas particulier où la valeur α qui, substituée à x, annule le coefficient A, réduirait de même à zéro le coefficient B du terme suivant. En remplaçant x par α, dans les polynômes entiers $\frac{A}{(x-\alpha)^{2r}}$, B, on aura pour résultats des nombres m', n' différents de zéro, positifs ou négatifs ; alors, il sera possible de trouver une quantité h assez petite pour que les équations $\frac{A}{(x-\alpha)^{2r}}=0$,

$B = 0$, n'aient aucune racine comprise entre $\alpha + h$ et $\alpha - h$. En faisant varier x depuis $\alpha + h$ jusqu'à $\alpha - h$, les fonctions A, B, conserveront constamment les signes des nombres m', n'. Entre ces deux limites $\alpha + h$, $\alpha - h$, le polynôme A s'annule lorsque $x = \alpha$; mais en passant par zéro il ne change pas de signe, puisque le nombre des racines égales à α est pair.

Les nombres m', n' auront le même signe, ou des signes différents; les exposants m, n, pourront être tous deux pairs ou tous deux impairs; ou bien encore l'un de ces exposants sera pair et l'autre impair : ce sont les différentes hypothèses dans lesquelles nous allons successivement discuter l'équation.

1° Si les nombres m', n' ayant le même signe, les exposants m, n sont tous deux pairs, ou tous deux impairs, aucune valeur de y, correspondante à $x = \alpha$, ne pourra être infinie réelle. En d'autres termes, la droite $x = \alpha$ ne sera pas asymptote à la courbe dont l'équation est

$$Ay^m + By^n + Cy^p + \ldots = 0.$$

En effet, nommons b la plus petite des valeurs que prend B, lorsque x varie depuis $\alpha + h$, jusqu'à $\alpha - h$; et N la plus grande valeur des coefficients C, D, etc., lorsque x varie entre ces deux limites. En substituant à y le nombre $\frac{N}{b} + 1$, ou bien un nombre plus grand, le polynôme $By^n + Cy^p +$ etc., aura toujours le même signe que son premier terme By^n, et la valeur absolue de ce polynôme ira continuellement en augmentant à mesure que y deviendra plus grand, à partir de $\frac{N}{b} + 1$.

D'ailleurs, le premier terme Ay^m de l'équation $Ay^m + By^n +$ etc. $= 0$, ne peut prendre un signe différent de celui du second terme By^n. Car, quelle que soit la valeur réelle attribuée à y, les puissances y^m, y^n seront, l'une et l'autre, positives ou négatives. De plus, les coefficients A, B, ont, pour les valeurs de x comprises entre $\alpha+h$ et $\alpha-h$, les signes des nombres m', n'; donc, le signe du produit Ay^m ne peut être différent de celui du produit By^n.

Par conséquent, en donnant à x des valeurs comprises entre $\alpha+h$ et à $\alpha-h$, et à y une valeur réelle plus grande que $\frac{N}{b}+1$, le premier membre de l'équation $Ay^m+By^n+Cy^p+\text{etc.}=0$, ne sera jamais annulé. Il en faut conclure que la valeur de y, correspondante à $x=\alpha$, n'est pas réellement infinie.

2° Si les nombres m', n', ayant le même signe, les exposants m, n, sont l'un pair, et l'autre impair : l'équation admettra la solution $x=\alpha, y=-\infty$. La droite $x=\alpha$ sera asymptote à deux branches de la courbe $Ay^m+By^n+\ldots=0$, du côté des ordonnees négatives; et ces deux branches seront situées de différents côtes de l'asymptote.

C'est ce qui résultera des observations suivantes.

Si l'on donne à y une valeur négative, et à x des valeurs comprises entre $\alpha\pm h$ et α, les deux termes Ay^m, By^n, auront toujours des signes contraires. Car, depuis $x=\alpha\pm h$ jusqu'à $x=\alpha$, les coefficients A, B ont les mêmes signes que les nombres m', n', et les puissances y^m, y^n, sont affectées de signes contraires, lorsque y est négatif.

De plus, on peut remplacer y par un nombre négatif $-y'$, dont la valeur absolue soit assez grande pour que, en faisant varier x depuis $\alpha+h$ jusqu'à $\alpha-h$, le polynôme $By^n+Cy^p+\text{etc.}$, ait constamment le signe de son premier terme By^n; on satisfait à cette condition en donnant à y', une valeur au moins égale à $\frac{N}{b}+1$.

Enfin, en remplaçant y par y' dans le terme $-Ay^m$, et faisant varier x depuis $\alpha+h$, ou $\alpha-h$, jusqu'à α; le terme Ay'^m diminuera continuellement et deviendra moindre que toute quantité donnée. Pour des valeurs de h suffisamment petites, on aura toujours $Ay'^m < By'^n + Cy'^p +$ etc. (Voy. tome III, page 88).

Cela posé, substituons $-y'$ à y, et $\alpha + h$ à x, dans le premier membre de l'équation proposée $Ay^m + By^n + Cy^p +$ etc. $= 0$; et donnons à h une valeur assez petite pour que l'inégalité $Ay'^m < By'^n + Cy'^p +$ etc., soit satisfaite. Le premier membre de l'équation aura un signe contraire à celui de son premier terme. Puis, sans rien changer à cette valeur de h, faisons croître y, à partir de y', jusqu'à ce que le premier membre de l'équation prenne le signe de son premier terme Ay^m; dans l'intervalle de ces valeurs attribuées à y, le premier membre de l'équation se sera annulé, au moins une fois, puisqu'il a changé de signe. Ainsi, l'équation en y aura au moins une racine négative $-\beta$, dont la valeur absolue surpassera celle de $-y'$. Et, comme on peut d'ailleurs supposer y' aussi grand que l'on voudra, il est demontré que :

En remplaçant x dans l'équation proposé par $\alpha \pm h$ (h étant une quantité réelle suffisamment petite), cette équation $Ay^m + By^n +$ etc. $= 0$, aura au moins une racine réelle négative $-\beta$ dont la valeur absolue surpasse tout nombre donné y'. Si l'équation a plusieurs racines négatives satisfaisant à cette condition, je nommerai $-\beta$ la plus grande de toutes, en valeur absolue.

Il est possible que plusieurs valeurs différentes de h donnent $y = -\beta$: je prendrai pour h la plus petite de toutes. De sorte que $\alpha + h$, représentera parmi les valeurs de x correspondantes à $y = -\beta$, celle qui diffère le moins de α. Alors, si l'on fait diminuer h, le polynôme $A(-\beta)^m + B(-\beta)^n +$ etc., qui était annulé, reprendra immédiatement le signe du terme $B(-\beta)^n$, pour $h' < h$, quelque petite que soit la diminution de h (voy. tome III, page 90). Actuellement, sans rien changer à la valeur h', faisons croître la valeur β de $-y$, jusqu'à ce que le premier membre de l'équation reprenne le signe de son premier terme Ay^m; par cette augmentation progressive de y, le premier membre de l'équation $Ay^m + By^n +$ etc. $= 0$, s'annulera, au moins une fois; l'équation admettra donc, pour $h' < h$, une racine $-\beta'$ dont la valeur β' sera plus grande que β.

D'après cela, on voit que : en diminuant x depuis $\alpha + h$ jusqu'à α, une des valeurs correspondantes de y variera depuis $-\beta$ jusqu'à $-\infty$. La variable y deviendra encore égal à $-\infty$, lorque x augmentera de $\alpha - h$ à α. Car le même raisonnement s'applique aux deux cas.

Ainsi, la courbe représentée par l'équation $Ay^m + By^n$ $+$ etc. $= 0$, aura, du côté des ordonnées négatives, deux branches asymptotes à la droite $x = \alpha$, et situées de différents côtés de cette droite.

Si y est positif, et x compris entre $\alpha + h$, et $\alpha - h$, les deux termes Ay^m, By^n, conserveront le même signe; aucune valeur positive de y correspondante à $x = \alpha$, ne deviendra infinie réelle. C'est ce qu'on a déjà démontré (p. 44, 1°). La droite $x = \alpha$ ne sera donc pas asymptote à la courbe du côté des ordonnées positives.

3° Lorsque les nombres m', n', sont de signes contraires, et les exposants m, n, tous deux pairs ou impairs : la valeur α de x, donne pour y deux valeurs réellement infinies, l'une positive, l'autre négative. Dans ce cas, la droite $x = \alpha$, est asymptote à la fois à quatre branches de la courbe représentée par l'équation $Ay^m + By^n + Cy^p +$ et $= 0$. Deux de ces branches s'étendent indéfiniment au-dessus de l'axe des abscisses, et sont situées de différents côtés de la droite $x = \alpha$. Les deux autres, au-dessous de l'axe des x, sont encore situées de différents côtés de leur asymptote $x = \alpha$.

En effet, pour les valeurs de x comprises entre $\alpha \pm h$ et α, les fonctions A, B, ont constamment des signes contraires, puisque les nombres m', n', sont de signes contraires. D'ailleurs, les puissances y^m, y^n, dont les exposants sont pairs tous deux, ou bien impairs, ont constamment le même signe. Il en résulte que, les produits Ay^m, By^n, seront affectés de signes différents.

La démonstration donnée (pages 45...47, 2°), trouve donc, ici même, son application. En faisant varier x depuis $\alpha + h$ jusqu'à α, une des valeurs de y restera constamment réelle et positive, une autre valeur restera négative; et à la limite $x = \alpha$, elles deviendront infinies. Ainsi, l'équation admettra ces deux solutions :

$$x = \alpha, y = \infty, \text{ et } x = \alpha, \ y = -\infty.$$

On arrive à la même conclusion en supposant que x augmente continuellement depuis $\alpha - h$ jusqu'à α. Par conséquent, l'équation proposée $Ay^m + By^n + Cy^p +$ etc. $= 0$, donne quatre branches de courbe, qui ont pour asymptote la droite $x = \alpha$. Deux de ces branches sont déterminees, en attribuant à y des valeurs positives, correspondantes aux valeurs de x comprises entre $\alpha \pm h$ et α; et les autres, en donnant à l'ordonnée y des valeurs négatives correspondantes à celles de l'abscisse, comprises entre les mêmes limites $\alpha \pm h$ et α.

4° Si l'on suppose, enfin, que les deux nombres m', n', ayant encore des signes contraires, les exposants m, n, soient l'un pair, et l'autre impair : l'équation proposée admettra la solution $x = \alpha$, $y = + \infty$; mais aucune valeur négative de y correspondante à $x = \alpha$, ne deviendra infinie. La droite $x = \alpha$, sera asymptote à deux branches de la courbe représentée par l'équation $Ay^m + By^n + Cy^p +$ etc. $= 0$, et situées, au-dessus de l'axe des abscisses, de différents côtés de $x = \alpha$. Aucune branche de la courbe, ne sera au-dessous de l'axe des x, asymptote à la droite $x = \alpha$.

Car, en faisant varier x depuis $\alpha \pm h$, jusqu'à α, et donnant à y des valeurs positives ; les termes Ay^m, By^n ont des signes contraires, donc l'équation admet la solution $x = \alpha$, $y = +\infty$ (pages 45, 47, 2°). D'ailleurs, les valeurs négatives de y donnent le même signe aux termes Ay^m, By^n ; donc, aucune valeur négative de y correspondante à $x = \alpha$, ne peut devenir infinie réelle.

On obtient d'ailleurs la solution $x = \alpha$, $y = +\infty$, en faisant varier x depuis $\alpha + h$ jusqu'à α, ou bien de $\alpha - h$ jusqu'à α. Il s'ensuit que deux branches de la courbe, situées de différents côtés de la droite $x = \alpha$, sont asymptotes à cette droite, dans le sens des ordonnées positives. Aucune branche ne peut être, du côté des ordonnées négatives, asymptote à $x = \alpha$, puisque l'équation de la courbe n'admet pas la solution réelle $x = \alpha$, $y = -\infty$.

10. Dans la discussion précédente, nous avons supposé que la racine α, multiple d'ordre pair de $A = 0$, substituée à x dans le terme By^n de l'équation proposée, ne réduisait pas à zéro, le coefficient B de ce terme. La substitution de α à x, peut annuler B et quelques-uns des coefficients C, D, des termes suivant Bx^n, mais tous les coefficients ne peuvent être à la fois réductibles à zéro, puisqu'ils ont été débarrassés de leurs facteurs communs en x. Je désignerai par $A'x^r$ le premier des termes dont le coefficient n'est pas annulé, et j'écrirai l'équation proposée sous la forme suivante :

$$Ay^m + By^n + Cy^p + \ldots + A'y^r + B'y^s + \ldots = 0.$$

Les lettres sans accent : A, B, C, etc., représentent des fonctions entières de x qui admettent le facteur $x - \alpha$; la fonction B' peut aussi être divisible par $x - \alpha$.

Après avoir divisé A, B, C,..., par les plus hautes puissances de $(x - \alpha)$, qui entrent comme facteurs dans ces polynômes, je remplace x par α dans les quotients obtenus, et je nomme m', n', p',..., les nombres résultant de cette substitution. Je représente aussi par r' la valeur que prend le coefficient A' lorsque $x = \alpha$. Enfin, je considérerai h comme une quantité réelle assez petite pour que l'équation $A' = 0$, et toutes celles que l'on forme en égalant à zero les quotients obtenus en divisant A, B, C,... par les plus hautes puissances de $x - \alpha$ qu'ils renferment, n'aient aucune racine comprise entre $\alpha + h$ et $\alpha - h$. Pour des valeurs de x comprises entre ces deux limites $\alpha + h$ et $\alpha - h$, les fonctions A, A', auront les mêmes signes que les nombres m', r'. Les coefficients B, C..., conserveront aussi les signes des nombres n', p'..., lorsqu'ils contiendront $x - \alpha$ à des puissances paires. Ils prendront des signes contraires à ceux des nombres n', p', etc., quand les plus hautes puissances de $x - \alpha$ contenues dans ces coefficients étant impaires, on remplacera x par $\alpha - h$. Dans tous les cas, il sera facile de reconnaître si les termes Ay^m, By^n, etc., $A'y^r$, sont positifs ou négatifs, pour les valeurs substituées aux variables x et y

Cela posé, lorsque en attribuant à x des valeurs comprises entre $\alpha \pm h$ et α, il sera possible de donner des signes contraires aux deux termes Ay^m, $A'y^r$; l'equation proposée admettra toujours pour l'inconnue y, une valeur infinie réelle, correspondante à $x = \alpha$, et le signe de la valeur infinie de y, sera celui des valeurs de y qui font prendre aux deux termes Ay^m, $A'y^r$ des signes différents Ainsi, l'équation admettra les deux solutions $x = \alpha, y = +\infty$, et $x = \alpha$, $y = -\infty$, si les valeurs positives et négatives de y donnent aux termes Ay^m, $A'y^r$ des signes différents.

C'est ce qui résulte évidemment de la demonstration donnée (tome III, pages 87 et suiv.).

On a un exemple de ce cas particulier dans l'équation

$$(x-1)^4 y^6 + (x-1)^3 y^5 + (x-4) y^4 + 1 = 0. \qquad (1)$$

Les nombres m', r', sont ici 1, — 3. En faisant varier x depuis 2 jusqu'à 1, ou de — 2 à 1, les termes $(x-1)^4y^6$, $(x-4)y^4$, ont constamment des signes contraires, quelle que soit la valeur attribuée à y. L'équation (1) admet les deux solutions :

$$x=1,\ y=+\infty\ ;\ \text{et}\ x=1,\ y=-\infty.$$

La parallèle $x=1$ à l'axe des y, est asymptote, à la fois, à quatre branches de la courbe représentée par l'équation proposée.

Lorsque Ay^m, $A'y^r$ ont constamment le même signe, pour les valeurs de x comprises entre $\alpha+h$ et $\alpha-h$, si aucun des termes intermédiaires, By^n, Cy^p..., ne peut prendre un signe contraire à celui des termes Ay^m, $A'y^r$ · l'équation proposée n'admettra pas la solution $x=\alpha, y=\infty$. Car la démonstration donnée (page 44, 1°) est alors applicable.

L'équation n'admettra pas non plus la solution $x=\alpha$, $y=\infty$, lors même que les termes intermédiaires By^n, Cy^p..., pourraient prendre des signes différents de celui de Ay^m, $A'y^r$, si les plus hautes puissances de $x-\alpha$ qui entrent dans les coefficients B, C... de ces termes sont supérieures à la puissance de $(x-\alpha)$ dans le coefficient A du premier terme de l'équation.

En effet, considérons, par exemple, l'équation

$$(x-1)^4y^6-(x-1)^5y^4-(x-1)^6y^3+(4-x)y^2+\text{etc.}=0. \quad (1)$$

En remplaçant x par $1+h$, cette équation devient :

$$h^4y^6-h^5y^4-h^6y^3+(3-h)y^2+\text{etc.}=0,$$

ou

$$h^4[y^6-hy^4-h^2y^3]+(3-h)y^2+\text{etc.}=0.$$

Et, on voit qu'en donnant à la quantité h une valeur positive ou négative moindre que l'unité, le polynôme $h^4y^6-h^5y^4-h^6y^3$ sera positif pour toutes les valeurs de y satisfaisant à l'inégalité $y^6 - y^4 - y^3 > 0$. Ainsi, en faisant varier h depuis 1 jusqu'à — 1, et donnant à y des valeurs suffisamment grandes, le premier membre de l'équation (1) restera constamment positif; donc cette équation ne peut admettre la solution réelle $x=1$, $y=\infty$. Et, par conséquent, la droite $x = 1$, ne peut être asymptote à la courbe que l'équation (1) représente. G.

(*La fin prochainement.*)