RISPAL

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 331-337

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__331_1>

QUESTIONS.

1° *Une parabole assujettie à rester constamment tangente à deux droites rectangulaires fixes, son foyer glissant constamment sur une circonférence dont le centre est à l'intersection des deux axes. On demande le lieu des sommets ;*

2° *Une droite de longueur constante glisse sur deux axes rectangulaires. Lieu des intersections successives de cette droite avec elle-même ;*

3° *Un cercle roule intérieurement sur une circonférence de rayon quatre fois plus grand. Lieu d'un point de celle-ci.*

Prouver que ces trois lieux sont identiques.

PAR M. RISPAL,
élève de l'École normale.

1° Soit F (*fig.* 30), le foyer dans une position particulière

(α, β) ; j'abaisse sur les axes, les perpendiculaires FC, FB et la ligne BC sera la tangente au sommet de la parabole. La perpendiculaire FO abaissée sur cette droite, donnera le point O pour le sommet ; les équations de CB et de OF sont

$$(1) \qquad (CB) \qquad \alpha y + \beta x = \alpha\beta,$$
$$(2) \qquad (FO) \qquad \beta y - \alpha x = \beta^2 - \alpha^2,$$
$$(3) \qquad \text{de plus} \qquad \alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

r est le rayon du cercle donné.

Des deux premières on tire

$$r^2y^2 = \beta^2, \qquad r^2x = \alpha^2,$$
$$\beta = \sqrt[3]{r^2y}, \qquad \alpha = \sqrt[3]{r^2x};$$

donc en substituant dans l'équation du cercle, il vient

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}},$$

pour le lieu cherché.

2° Soit AB (*fig.* 31), la droite de longueur constante r, l'équation de AB est ici

$$(4) \qquad \alpha y + \beta x = \alpha\beta.$$

Si la droite prend une position un peu différente, α par exemple s'accroît, et β diminue d'une quantité infiniment petite, soient $d\alpha$ et $-d\beta$ ces quantités, l'équation de la droite devient

$$(\alpha + d\alpha)y + (\beta + d\beta)x = (\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta),$$
$$\alpha y + d\alpha.y + \beta x + d\beta.x = \alpha\beta + \alpha d\beta + \beta d\alpha + d\alpha.d\beta,$$

simplifiant cette équation au moyen de l'équation (4), et négligeant l'infiniment petit du second ordre, l'équation devient

$$d\alpha.y + d\beta.x = \alpha d\beta + \beta d\alpha,$$

d'où

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\beta - y}{x - \alpha},$$

on a d'ailleurs

$$(5) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

qui devient aussi

$$(\alpha + d\alpha)^2 + (\beta + d\beta)^2 = r^2,$$
$$\alpha^2 + 2\alpha d\alpha + (d\alpha)^2 + \beta^2 + 2\beta d\beta + (d\beta)^2 = r^2.$$

Simplifiant encore à l'aide de l'équation (5), et supprimant les infiniment petits du second ordre, il vient

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta = 0, \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Éliminant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre les deux dernières équations, il vient, toute réduction faite

$$(6) \qquad \beta y - \alpha x = \beta^2 - \alpha^2,$$

et il ne s'agit plus que d'éliminer α et β entre les équations (4), (5) et (6), qui ne sont autres que les équations (1), (2) et (4), et qui par conséquent donneront le même lieu

$$y_1^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.$$

3° Soit OAB (*fig.* 32) un cercle; CVM un autre tangent intérieurement, et de rayon quatre fois moindre; soit A l'origine du mouvement, et V le point du lieu, on aura arc CV = arc CA, donc CDV = 4COA.

Menons la ligne du centre OMDC, CV, et MV perpendiculaire, évidemment sur CV, et coupant les axes en Q et en P. Le triangle CMV, inscrit dans le cercle D montre que

$$MD = DV = DC,$$

donc

$$CDV = 2DMV,$$

il suit de là que

$$DMV = 2COA = COA + MDV,$$

donc

$$MDV = COA,$$
$$MO = MP;$$

mais $\qquad MO = MC, \qquad$ donc $\qquad MP = MC,$

et le triangle CPO est rectangle.

On voit aisément que les triangles QPO et COP sont égaux, donc la figure OCPQ est un rectangle, et le point V est la projection du sommet C sur la diagonale QP, ce qui montre évidemment que ce lieu rentre dans le premier. Ainsi les trois lieux n'en font qu'un seul dont l'équation est

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.$$

Occupons-nous maintenant de discuter l'équation, et de construire la courbe (*fig.* 33). En la résolvant par rapport à y, on a

$$y = \pm \sqrt{\left(r^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}.$$

La courbe est donc symétrique, par rapport à l'axe des y, on voit aussi qu'elle l'est par rapport à l'axe des x, car l'équation est symétrique, en x et en y. La courbe se compose donc de quatre parties égales dans les quatre angles;

pour $\qquad x = 0, \quad y = r,$

à mesure que x croît, y décroît sans cesse, et enfin

pour $\qquad x = r, \quad y = 0,$

si on prend le coefficient angulaire

$$\text{tang}\,\alpha = - \sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

On voit qu'il est toujours négatif, nul pour $y = 0$, infini pour $y = r$, donc la courbe est tangente aux axes en A et en B; de plus il n'y a pas de point d'inflexion, car à partir de $x = r, y = 0$, tang α croît indéfiniment depuis 0 jusqu'à $-\infty$, en restant sans cesse négative.

Si on mène la bissectrice OG de l'angle des axes, il est facile de voir que le point M où elle rencontre la courbe, est le milieu du rayon OG.

L'équation de la tangente est

$$y - y' = -\sqrt[3]{\frac{y'}{x'}}\,(x - x').$$

soit fait $y = 0$, pour avoir la distance de l'origine au pied de la tangente sur l'axe des x, on a

$$y'\sqrt[3]{x'} = \sqrt[3]{y'}\,x - \sqrt[3]{y'}.x',$$

$$x = x'^{\frac{1}{3}}y'^{\frac{2}{3}} + x' = x'^{\frac{1}{3}}\left(r^{\frac{2}{3}} - x'^{\frac{2}{3}}\right) + x' = x'^{\frac{1}{3}}\,r^{\frac{2}{3}},$$

donc

$$x^3 = r^2x',$$

on aurait de même

$$y^3 = r^2y',$$

donc

$$x^2 + y^2 = r^{\frac{4}{3}}x'^{\frac{2}{3}} + r^{\frac{4}{3}}y'^{\frac{2}{3}} = r^2,$$

Ainsi la partie de la tangente comprise entre les axes est constamment égale au rayon du cercle circonscrit comme nous le savions déjà.

La valeur $x^3 = r^2x'$, nous montre que cette courbe peut servir à résoudre le problème des deux moyennes proportionnelles, car soient les proportions

$$r : x :: x : u,$$
$$x : u :: u : x',$$

on en tire

$$ru = x^2, \quad u^2 = xx',$$

d'où

$$x^3 = r^2x', \quad u^3 = x'^2r.$$

On voit donc que x se trouve ainsi connu; si on construit une courbe ayant pour génératrice la droite r, qu'on lui mène une tangente par le point dont l'abscisse est x', la distance comprise entre le centre et le pied de la tangente, sur l'axe des x, sera l'une des moyennes proportionnelles. Dès lors l'autre peut s'obtenir très-aisément.

Occupons-nous de la rectification ; on a

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2};$$

mais l'équation donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3}{x^{\frac{1}{3}}},$$

donc

$$ds = \sqrt{\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}(dx)^2 + (dx)^2},$$

$$ds = \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}\sqrt{y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}};$$

mais

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}},$$

donc

$$ds = r^{\frac{1}{3}}\, x^{-\frac{1}{3}}\, dx,$$

donc

$$\int ds = r^{\frac{1}{3}}\frac{x^{1-\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}} + \text{C},$$

$$\int ds = \frac{3r^{\frac{1}{3}}}{2}\, x^{\frac{2}{3}} + \text{C}.$$

Or si on fait $x = 0$ l'intégrale s'annule ; donc la constante est nulle

$$\int ds = \frac{3r^{\frac{1}{3}}}{2}\, x^{\frac{2}{3}}.$$

Si on veut avoir l'arc qui est le quart de la courbe, et compris entre les limites $x = 0$, $x = r$, on aura pour l'intégrale définie entre 0 et r,

$$\int_0^r ds = \frac{3r}{2},$$

donc la longueur du périmètre totale sera quadruple ou égale à 6 fois le rayon du cercle proposé.

Le quart de circonférence BGA a pour mesure $\frac{\pi r}{2}$, et cette quantité est plus grande que $\frac{3r}{2}$, car on a $\pi > 3$, donc l'arc de courbe BMA est un peu moins convexe que celui du cercle BGA (*).