NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRETON (DE CHAMP)

Recherches sur l'enveloppe de la corde d'une section conique, vue d'un point de son plan, sous un angle constant

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 300-303

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__300_0>

RECHERCHES

Sur l'enveloppe de la corde d'une section conique, vue d'un point de son plan, sous un angle constant

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

Le traité des propriétés projectives des figures, renferme plusieurs beaux théorèmes sur la corde d'une section conique, qui est vue d'un point de son plan sous un angle donné. Le savant auteur de ce livre si remarquable y a réuni tout ce que l'on sait là-dessus, tant par ses propres recherches, que par celles de ses devanciers. Il a démontré que l'enveloppe est une section conique ; l'angle sous-tendu étant quelconque, lorsque le sommet est sur la courbe ou à l'un des foyers, et l'angle étant droit, lorsque le sommet occupe une position quelconque. Enfin, dans le cas où la courbe se réduit à deux droites, le théorème a lieu quelles que soient la grandeur de l'angle et la situation du sommet.

Aucun de ces cas n'offre une solution générale de la question. Aussi M. Terquem exprime-t-il (t. III, p. 124) le désir que ces recherches soient complétées. C'est ce que j'ai essayé, ainsi qu'on va le voir.

1.— Avant d'entrer en matière, j'énoncerai deux lemmes.

1° Il est toujours possible de couper une surface conique du second ordre, de manière que la section projetée sur un plan donné, soit une circonférence de cercle.

2° La projection du sommet du cône sur le même plan, lorsqu'elle tombe au centre de la circonférence, est un foyer de la section faite dans le cône par ce plan.

Les démonstrations ne présentent aucune difficulté ; je me borne aux énoncés ci-dessus, prévenant d'ailleurs qu'il s'agit uniquement de projections orthogonales dans cet article.

2. — Cela posé, d'un point pris arbitrairement sur la perpendiculaire au plan de la courbe donnée, qui a pour pied le point fixe d'où la corde est vue sous un angle constant, comme sommet, avec cette ligne pour base, concevons que l'on décrive une surface conique. Le plan qui passe continuellement par le sommet et par la corde mobile enveloppe une autre surface conique du même sommet que la première ; cette nouvelle surface sera du second degré, si l'enveloppe courbe qui lui sert de base est une section conique. De plus, si l'on mène un plan qui coupe à la fois les deux surfaces, la projection de l'une des courbes obtenues sera l'enveloppe des cordes de la projection de l'autre, vues du point fixe sous l'angle donné. Or il est toujours possible de faire en sorte que cette seconde projection soit une circonférence de cercle, donc il suffit de considérer la corde mobile dans le cercle.

3. — Lorsque la bissectrice de l'angle passe par le centre de ce cercle, on a immédiatement sur cette droite, deux points de l'enveloppe ; ce sont évidemment les extrémités d'un axe de symétrie. Je prends cet axe pour ligne des abscisses, le point fixe pour origine, ce qui donne l'équation aux coordonnées rectangulaires du cercle :

$$y^2 + (x - c)^2 = r^2 \qquad (1)$$

dans laquelle c et r sont la distance du point fixe au centre, et le rayon. Soit φ l'angle mobile, et $\alpha =$ tang. $\frac{1}{2}\varphi$, les points de l'enveloppe situés sur l'axe, auront pour abscisses les racines de l'équation (1), après que l'on y aura fait $y = \alpha x$. Par cette substitution elle devient :

$$(1 + \alpha^2) x^2 - 2cx - (r^2 - c^2) = 0. \qquad (2)$$

Je suppose, pour fixer les idées, que l'origine est dans l'intérieur du cercle, c'est-à-dire que l'on a $r > c$. L'équation de la conique enveloppe, si c'est une conique, sera donc de la forme :

$$Ay^2 + (1+\alpha^2)\,x^2 - 2cx - (r^2 - c^2) = 0, \qquad (3)$$

A étant un coefficient à déterminer.

Pour en connaître la valeur, amenons la bissectrice de l'angle mobile à coïncider avec l'axe des y. Dans cette position, il est aisé de vérifier que le point de l'enveloppe est sur l'axe des y, ce qui s'accorde avec la supposition que cette courbe est une section conique. Mais cette induction serait trompeuse, c'est ce que je vais faire voir.

La valeur de A s'obtient sans difficulté. On trouve par un calcul très-simple :

$$A = 1 + \alpha^2 + \frac{c^2\alpha^2}{r^2 - c^2},$$

et en nommant b^2 le carré du demi-axe parallèle aux y, on a :

$$b^2 = \frac{r^2 - c^2 + \dfrac{c^2}{1+\alpha^2}}{1 + \alpha^2 + \dfrac{c^2\alpha^2}{r^2 - c^2}}. \qquad (4)$$

D'un autre côté, si l'on détermine b^2, de manière que la tangente parallèle à l'axe des x soit sous-tendue par l'angle donné, on arrive à l'équation :

$$b^4(1+\alpha^2) - b^2[r^2(1+\alpha^2)^2 - 4c^2\alpha^2] + \alpha^2(r^2 - c^2 = 0,) \qquad (5)$$

à laquelle il faut que la valeur (4) de b^2 satisfasse, si l'enveloppe est réellement une section conique. Or la substitution de cette valeur conduit à l'équation de condition

$$c^6(r^2 - c^2)\,\frac{\alpha^2(1-\alpha^2)^4}{(1+\alpha^2)^5} = 0. \qquad (6)$$

C'est de là qu'on tirera toutes les solutions de la question, le calcul ayant été fait de manière à n'en écarter aucune.

4. — On satisfait à l'équation ci-dessus, 1° en posant $c = 0$. Alors l'enveloppe est une circonférence de cercle, mais aussi

le sommet de l'angle, d'après le deuxième lemme indiqué au commencement de cet article, est au foyer de la courbe donnée; c'est un des cas traités par M. Poncelet.

2° En faisant $c^2 = r^2$. Le sommet de l'angle est sur la courbe, c'est encore un cas déjà connu.

3° $\alpha = 0$ satisfait à la question, c'est évident, car cette hypothèse rend nul l'angle mobile, et l'enveloppe n'est autre chose que la courbe proposée.

4° En égalant à zéro le facteur $1 - \alpha^2$, on obtient encore l'un des cas traités par M. Poncelet, savoir celui où l'angle est droit. L'enveloppe est une circonférence, ou une section conique dans le cas général.

5.— Lorsque la section conique proposée se réduit à deux droites, l'enveloppe est, comme on sait, une section conique. Mais alors il est impossible de couper le cône suivant une direction, telle que la section se projette sur la base suivant un cercle. Aussi ce cas échappe-t-il à l'analyse qui précède, mais on a des démonstrations directes qui ne laissent rien à désirer du côté de la simplicité.

6.— Ce qui vient d'être dit suppose une restriction, savoir que le point fixe est dans l'intérieur de la circonférence. S'il en était autrement, la courbe pourrait n'être pas fermée, et la question est de savoir si elle peut être une parabole ou une hyperbole; il faudrait pour cela qu'on eût $1 + \alpha^2 = 0$. Ce qui ne saurait être; ou $A < 0$: d'où résulterait pour b^2 une valeur négative, or l'équation finale obtenue ci-dessus est indépendante du signe de b^2, donc elle comprend tous les cas sans exception.

7.— La conclusion de tout ceci, c'est que les cas dans lesquels on savait jusqu'à présent que la corde d'une section conique, qui est vue d'un point de son plan sous un angle constant, enveloppe une autre section conique, sont les seuls possibles.