NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHAPPON

Note sur une propriété des courbes du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 298-299

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__298_1>

NOTE

Sur une propriété des courbes du second degré.

PAR M. CHAPPON,
élève de mathématiques du collége Saint-Louis (classe de M. VINCENT).

Le produit des distances des deux foyers d'une ellipse à une tangente quelconque est égal au carré du demi-petit axe.

Si on abaisse des perpendiculaires FP, F'P' (*fig.* 25), sur une tangente à l'ellipse, les pieds P, P', de ces perpendiculaires se trouvent sur la circonférence décrite sur le grand axe AB comme diamètre. Cela étant, joignons PO et prolongeons OP et P'F' jusqu'à leur rencontre en N.

Les triangles OFP, OF'N sont égaux comme ayant un côté égal OF = OF' adjacent à 2 angles égaux POF = NOF', OFP = OF'N, donc ils sont égaux ; donc ON = OP, et par suite le point N est sur l'ellipse ; de plus F'N = FP, et par conséquent on aura :

$$FP.F'P' = F'N.F'P' = AF'.F'B = (a-c)\,(a+c) = a^2 - c^2 = b^2,$$

en désignant le demi grand axe par a, le demi petit axe par b, et la demi-excentricité par c.

Le théorème est absolument le même pour l'hyperbole, et on le démontre d'une manière semblable.

Je dis qu'on aura $FP.F'P' = b^2$ (*fig.* 26). En effet le cercle décrit sur l'axe transverse, comme diamètre, contient les projections des foyers sur toutes les tangentes ; comme les points P, P'. Joignons OP, et prolongeons cette ligne jusqu'à sa rencontre en un point R avec la ligne F'P', les 2 triangles POF, ROF' sont égaux comme ayant un côté égal OF = OF' adjacent à deux angles égaux, savoir : OFP = OF'R et FOP = F'OR. Donc OR = OP, et le point R est situé sur le cercle ; de plus FP = F'R ; donc

$$FP.F'P' = FR.F'R.$$

Mais si on abaisse du foyer la perpendiculaire F'Q, sur l'asymptote, le point Q appartiendra au cercle, et la ligne FQ lui sera tangente en ce point, et comme cette perpendiculaire est égale au demi petit axe b,

$$FP.F'P' = F'R.FP' = b^2.$$