NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ARMAND FARCY

Composition d'analyse au concours d'agrégation 1842. Étant donnée une série de paraboles qui ont même axe et même foyer, déterminer les courbes qui coupent ces paraboles à angle droit. Déterminer les courbes qui coupent à angle droit une série d'ellipses de mêmes foyers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 285-292

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__285_1>

COMPOSITION D'ANALYSE.

Au concours d'agrégation 1842 (V. tom. 3, p. 517).

Étant donnée une série de paraboles qui ont même axe et même foyer, déterminer les courbes qui coupent ces paraboles à angle droit.

Déterminer les courbes qui coupent à angle droit une série d'ellipses de mêmes foyers.

PAR M. ARMAND FARCY,
Ancien élève de l'Ecole polytechnique.

I. La parabole, rapportée à son sommet, a pour équation connue $y^2=2px$. Cette équation devient, en portant l'origine au foyer : (1) $y^2=2px+p^2$.

Telle est donc, en supposant indéterminé le paramètre $2p$, l'équation collective de toutes les paraboles de même axe et de même foyer.

En un point x, y de l'une d'elles, la direction de la tangente est donnée par le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$ que l'on peut exprimer en fonction seulement des coordonnées du point, en tirant de l'équation (1) la valeur du demi-paramètre $p = -x \pm \sqrt{x^2+y^2}$. Ce qui donne :

$$(2) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

Au même point, x, y, doit passer une des trajectoires orthogonales demandées, et son coefficient différentiel y doit être : $\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{y}{x \mp \sqrt{x^2+y^2}}$ (3), c'est-à-dire que telle est l'équation différentielle des courbes cherchées. Pour l'intégrer nous passerons aux coordonnées polaires : c'est une marche dont l'à-propos est indiqué par l'homogénéité de l'équation, et par la présence du seul radical $\sqrt{x^2+y^2}$. Posant donc : $y = \rho \sin \omega$ $x = \rho \cos \omega$; d'où il résulte successivement : $dy = \sin \omega d\rho + \rho \cos \omega d\omega$, $dx = \cos \omega d\rho - \rho \sin \omega d\omega$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \omega \frac{d\rho}{d\omega} + \rho \cos \omega}{\cos \omega \frac{d\rho}{d\omega} - \rho \sin \omega}$$; il viendra en substituant dans (3)

$$\frac{\sin \omega \frac{d\rho}{d\omega} + \rho \cos \omega}{\cos \omega \frac{d\rho}{d\omega} - \rho \sin \omega} = \frac{\sin \omega}{\cos \omega \mp 1},$$ qui devient en simplifiant

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \pm \frac{\rho(1 \mp \cos \omega)}{\sin \omega}, \text{ ou bien } \frac{d\rho}{\rho} = \pm \frac{1 \mp \cos \omega}{\sin \omega} d\omega \quad (4).$$

Par la correspondance des signes, cette équation se partage en ces deux autres : $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\cos \frac{1}{2}\omega} d\omega$, $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\cos \frac{1}{2}\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega} d\omega$, qui donnent respectivement étant intégrées $\rho = \frac{A}{\cos^2 \frac{1}{2}\omega}$, $\rho = \frac{A}{\sin^2 \frac{1}{2}\omega}$, intégrales que l'on peut aisément, par l'emploi d'un double signe, réunir en une seule $\rho = \frac{p'}{1 \pm \cos \omega}$, p' représentant une constante arbitraire double de celle désignée par A.

L'équation polaire, collective, des trajectoires demandées est donc $\rho = \frac{p'}{1 \pm \cos\omega}$, équation d'une parabole rapportée à son axe et à son foyer, donnée d'ailleurs tout entière par un seul des deux signes. On reconnaît par là que les paraboles proposées, c'est-à-dire ayant l'axe et le foyer donnés, se partagent en deux systèmes · celles ouvertes d'un côté, et celles ouvertes de l'autre, et que toutes celles d'un système coupent toutes celles de l'autre à angle droit

II. Cette propriété pouvait être reconnue à priori, car 1° l'équation (2) fournissant deux valeurs toujours réelles de $\frac{dy}{dx}$, c'est qu'en chaque point du plan se croisent deux paraboles ayant l'axe et le foyer voulus, mais leurs coefficients différentiels respectifs $\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ et $\frac{-x-\sqrt{x^2+y^2}}{y}$, ont pour produit -1, elles se croisent donc à angle droit, etc... L'équation (2), équation différentielle des paraboles données, devient d'ailleurs en faisant disparaître le radical · $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\left(\frac{dy}{dx}\right) - y^2 = 0$, ou bien $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0$, et sous cette forme, le dernier terme -1, montre encore qu'en chaque point passent deux courbes qui s'y coupent à angle droit.

2° Soient deux paraboles de sens contraires, ayant l'une et l'autre l'axe et le foyer voulus, et se coupant en M; leurs tangentes en M coupant respectivement l'axe commun en T et T' aux distances FT et FT du foyer commun F, on sait que FM est égale d'une part à FT, d'autre part à FT', par suite le triangle TMT' est rectangle en M, etc. Ou bien si on mène par le point commun M la droite AA' perpendiculaire commune aux directrices des deux paraboles, les deux tangentes bissectrices, comme on sait, des angles supplementaires adjacents AMT, A'MT' seront perpendiculaires entre elles, C.Q.F.D.

III. Généralement soit $F(x, y, a)$: A une famille de courbes, pour en trouver les trajectoires orthogonales, il faudra manifestement en tirer, comme dans l'exemple précédent $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ d'abord fonction de x, y, a. Puis seulement de x, y ; soit $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \Phi(x, y)$; puis en conclure $\left[\frac{dy}{dx}\right] = -\frac{1}{\varphi(x, y)}$, équation différentielle des trajectoires.

Mais si de $F(x, y, a)$ on ne peut, ou ne veut pas tirer explicitement $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, et qu'on soit seulement parvenu à la relation non-résolue $f\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = 0$, il suffira d'y remplacer $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ par $-\frac{1}{\left[\frac{dy}{dx}\right]}$, pour obtenir l'équation différentielle des trajectoires que nous désignerons par

$$\varphi\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = 0.$$

Si donc il arrive que $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, qui n'est d'ailleurs autre chose que l'équation différentielle des lignes données, soit une équation *inversement réciproque* (*), le changement de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ en $-\frac{1}{\left[\frac{dy}{dx}\right]}$, fait retomber sur cette

(*) Nous nommons ainsi toute équation qui, admettant la racine α, admet nécessairement celle $\frac{-1}{\alpha}$, en d'autres termes, celle dont les racines font deux à deux le produit -1. Les caractères propres de ces équations sont étudiés dans tous les cours d'eléments.

même équation, et la famille donnée renferme en elle-même comme ci-dessus, ses trajectoires orthogonales. Pour en citer un exemple aussi connu que remarquable : c'est ce qui a lieu sur une surface pour ses lignes de courbure.

IV. L'ellipse rapportée à son centre et à ses axes a pour équation connue $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ (5). Si l'on y suppose a et b indéterminés sous la seule condition $a^2 - b^2 = c^2$ (6), elle convient alors à toutes les ellipses confocales.

En un point x, y, de l'une d'elles, la direction de la tangente est donnée par le coefficient différentiel $\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{b^2x}{a^2y}$ (7). L'élimination de a^2 et de b^2 entre les relations (5), (6), (7), donne d'abord : $\left[y - x\frac{dy}{dx}\right]\left[x + y\frac{dy}{dx}\right] + c^2\frac{dy}{dx} = 0$, puis en développant : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{c^2+y^2-x^2}{xy}\left(\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0$ (8).

Équation différentielle des ellipses proposées. Il suffirait, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, d'y remplacer $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, pour avoir l'équation différentielle de leurs trajectoires orthogonales ; mais l'équation (8) étant inversement réciproque, convient en même temps et aux courbes proposées, et à leurs trajectoires orthogonales. Cependant comme des ellipses confocales ne sauraient se rencontrer, il est aisé d'apercevoir qu'elles ont pour trajectoires orthogonales les hyperboles de même foyer. (*V*. t. III, p. 425).

En effet, ces hyperboles ont pour équation collective : (5') $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Sous la condition (6') $a^2 + b^2 = c^2$, et pour coefficient différentiel : (7') $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{b^2x}{a^2y}$. Ces trois relations (5'), (6'), (7'), ne différant de celles (5), (6), (7), que par le signe de b^2, l'élimination de a^2 et de $-b^2$ entre

(5'), (6') et (7') donnera comme celle de a^2 et de b^2 entre (5), (6), (7), la relation (8) qui est ainsi l'équation différentielle non-seulement des ellipses, mais plus généralement des coniques confocales, et ces coniques se partagent en deux groupes, celui des ellipses, et celui des hyperboles qui sont réciproquement les trajectoires orthogonales les unes des autres.

Il est d'ailleurs facile de justifier cette propriété par des considérations géométriques comme nous l'avons fait pour les paraboles ; car soient F, F' les deux foyers communs, et M un point où se croisent une des ellipses et une des hyperboles, leurs tangentes en M étant bissectrices l'une de l'angle FMF', l'autre de son adjacent supplémentaire, sont perpendiculaires entre elles, C.Q.F.D.

V. En représentant par $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ et $\left[\frac{dy}{dx}\right]$, les valeurs des coefficients différentiels respectifs de deux courbes en un point commun, la condition connue pour qu'elles se coupent à angle droit, est que $\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \left[\frac{dy}{dx}\right] + 1 = 0$. Cette condition se retrouve à peu près sous la même forme dans un système de coordonnées polaires. En effet soient alors $\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)$ et $\left[\frac{d\rho}{d\omega}\right]$, les nouveaux coefficients différentiels; les courbes font avec le rayon vecteur mené au point commun des angles qui ont respectivement pour tangentes trigonométriques $t = \frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)}$, $t' = \frac{\rho}{\left[\frac{d\rho}{d\omega}\right]}$, et si l'on veut que ces courbes soient perpendiculaires l'une à l'autre, l'un de ces angles doit surpasser l'autre de 90°, d'où résulte, comme en coordonnées rectangulaires, la condition $tt' + 1 = 0$, ou bien :

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)\left[\frac{d\rho}{d\omega}\right] + \rho^2 = 0.$$

Telle est donc la relation générale de laquelle on peut tirer l'équation différentielle en coordonnées polaires des trajectoires orthogonales, une fois connu le coefficient différentiel des courbes primitives en coordonnées polaires. Si l'on a seulement l'équation différentielle des courbes primitives : $F\left(\rho,\ \omega,\ \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)\right)=0$, il suffit d'y remplacer $\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)$ par $-\frac{\rho^2}{\left[\frac{d\rho}{d\omega}\right]}$, pour passer à celle des trajectoires, et si, par cette transformation, on retombe sur l'équation $F\left(\rho,\ \omega,\ \left[\frac{d\rho}{d\omega}\right]\right)=0$, c'est que, comme dans le cas des coniques confocales, le système de courbes proposé renferme en lui-même ses trajectoires orthogonales. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qne toutes les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, tirée de $F=0$, fassent deux à deux un produit $-\rho^2$.

Ainsi les paraboles confocales ont pour équation collective en coordonnées polaires : $\rho=\frac{-p}{\cos\omega\pm1}$, (9), d'où

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)=\frac{-p\sin\omega}{(\cos\omega\pm1)^2}=\frac{\rho\sin\omega}{\cos\omega\pm1}, \qquad (10)$$

par suite dans leurs trajectoires orthogonales

$$\left[\frac{d\rho}{d\omega}\right]=\frac{-\rho(\cos\omega\pm1)}{\sin\omega}=\frac{\rho\sin\omega}{\cos\omega\mp1}, \quad (11)$$

et cette coïncidence des valeurs de $\left[\frac{d\rho}{d\omega}\right]$ avec celles de $\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)$ démontre encore la propriété reconnue ci-dessus des paraboles confocales. On remarquera que l'équation polaire, habituelle de la parabole est $\rho=\frac{p}{1-\cos\omega}$, parce que dans l'équation (9), on ne prend que le signe inférieur, ce qui suffit en effet à donner toute la courbe, pourvu qu'on *suive toutes les valeurs d'ω depuis 0° jusqu'à 360°; mais il* faut bien se garder d'en agir ainsi dans la recherche qui nous occupe, car en ne conservant que le signe inférieur dans (9), on n'aurait aussi que le signe inférieur dans (10), et aussi dans (11), et l'on n'apercevrait plus la coïncidence de ces dernières formules.

Note. La question des *trajectoires* remonte à l'origine des nouveaux calculs, et remplit une page brillante dans l'histoire de la science. C'est Jean Bernoulli qui s'en occupa le premier, et imposa à ces courbes le nom qu'elles ont conservé. Il a été amené à ce genre de méditations par la théorie des ondes lumineuses de Huyghens. Il est à remarquer que, de nos jours, la physique de la chaleur a donné lieu à d'importants théorèmes sur les surfaces trajectoires. On connaît la vive et instructive polémique que cette matière a excitée dans la noble famille, gloire de l'Helvétie; ces froissements d'amour-propre ont fait sortir des étincelles de génie qui nous éclairent encore aujourd'hui. Le grand Leibnitz entra dans la lice et découvrit la différentiation sous le signe *de curva in curvam*, vrai prodrome du calcul des variations. Ayant en vue ces discussions, Leibnitz écrit à Jean Bernoulli, de Hanovre, en date du 21 mars 1694 : « Quanto pauciores sunt solidæ scientiæ cultores, eo magis inter se amicos esse convenit. Sunt tot alii, quos appello mercenarios in litteris, qui nihil agerent, nisi vel necessitate, vel pravis cupiditatibus impellerentur. Hos inter se conflictari sinamus (*Comm. epist.*, t. II, p. 5).» Dans un autre endroit il lui écrit : « Sed vide sterilescere hoc ævum in omni pene genere doctrinæ, et quanto majora habent subsidia studiosi, eo magis ignaviam invalescere (*ibid.* p. 97) ; » aperçu très-fin, observation juste et toujours vraie. Tm.