AMPÈRE

Théorie du calcul élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 278-285

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__278_1>

THÉORIE DU CALCUL ÉLEMENTAIRE.

PAR M. AMPÈRE. (Œuvre posthume.)

(Fin, voir p 109, 161 et 213.)

---

33. Il y a cette différence essentielle entre ces deux espèces de nombres, que l'idée claire et précise que nous avons des nombres rationnels, nous donne la facilité de les représenter par des signes et de les désigner par des noms, dont on est convenu de se servir pour cela; tandis que nous ne pouvons avoir aucune idée précise des nombres irrationnels, quoiqu'il y en ait quelques-uns auxquels on a affecté des noms et des signes, d'après les relations que l'on concevait entre eux et certains nombres rationnels. Il est toujours facile, au reste, de trouver des nombres rompus qui approchent d'aussi près qu'on le veut de tous les nombres irrationnels qu'on peut être dans le cas de vouloir déterminer, et qu'on est dans l'usage d'employer à la place de ces irrationnels; on n'obtient à la vérité par là qu'une valeur approchée des grandeurs qu'on détermine par ce moyen, mais cet inconvénient n'est d'aucune conséquence dans l'application du calcul aux arts, aux sciences et aux besoins de la société, l'exactitude rigoureuse y étant si peu nécessaire, qu'on a coutume, dans la seule vue de simplifier les opérations du calcul, de ne se

servir que de valeurs approchées, même pour les nombres rationnels, lorsque les valeurs exactes de ceux-ci seraient trop compliquées, ou sous une forme peu commode à l'exécution de ces opérations.

La quatrième espèce de nombres, a dû sa naissance à la perfection que le calcul a acquise depuis quelques siècles. On ne peut douter cependant que les anciens n'aient fait quelquefois l'espèce de comparaison dont elle est le résultat, puisqu'il nous arrive assez souvent de la faire dans le cours de la conversation, mais comme c'est moins une espèce de nombres, absolument différents de ceux dont nous avons parlé jusqu'à présent, qu'une modification particulière dont ils sont tous susceptibles, ils se servaient des mêmes noms pour les exprimer, en indiquant cette modification par le reste de la phrase; et n'ayant pour les désigner aucun nom, ni aucun signe particulier, ils ne les distinguaient point des autres nombres; on ne s'est avisé de cette distinction qu'après avoir établi un signe pour les désigner, et ce ne sont que les progrès ultérieurs du calcul qui ont fait sentir combien elle était indispensable pour lui donner la généralité et l'uniformité sans lesquelles il n'aurait jamais approché du degré de perfection où il est aujourd'hui porté Il est même très-digne de remarque, que l'idée de cette distinction est très-postérieure à l'invention de ce signe qui avait d'abord une signification absolument différente, mais qu'on a changée insensiblement comme il arrive dans toutes les langues, au sens attaché à une foule de mots, pour lui faire exprimer une idée qui manquait de signes par cela même que la distinction sur laquelle elle repose, n'avait été saisie que lorsque le calcul eut faits de grands progrès; il paraît même qu'elle ne l'a été que très-imparfaitement par les auteurs de nos livres élémentaires. qui ont tous donné d'abord à ce signe sa signification primitive, pour la modifier ensuite successivement, ce qui a jeté sur les principes du calcul une sorte d'obscurité, que je me suis efforcé de dissiper, en présentant ici le sens attaché à ce signe sous un point de vue absolument différent, et conforme à l'usage qu'on en fait réellement dans toutes les opérations du calcul.

L'espèce de comparaison dont nous allons tirer l'idée de cette nouvelle sorte de nombres n'est pas seulement nécessaire à cet objet, on verra dans le premier livre de cet ouvrage, que ce n'est que d'elle qu'on peut tirer une définition précise des relations existantes entre différents nombres qui servent de base à toutes les règles fondamentales du calcul (*), définition d'autant plus importante, qu'il serait presque impossible de rendre raison sans elle d'une partie de ces règles, et surtout des modifications qu'elles éprouvent, lorsqu'après les avoir appliquées au calcul des nombres entiers, on passe successivement à celui des autres espèces de nombres.

Cette sorte de comparaison diffère de toutes les autres en ce qu'au lieu de comparer entre elles les grandeurs elles-mêmes, on ne compare que les inégalités qui peuvent exister entre deux grandeurs et qui, comme nous l'avons déjà dit, doivent être rangées dans la classe des grandeurs qui résulte de la comparaison de deux objets, il est évident que celle de deux inégalités suppose nécessairement quatre grandeurs, homogènes deux à deux, pour qu'il puisse exister entre elles deux inégalités. Et comme dans l'explication que nous allons en donner, il faudra en parler sans cesse sans risquer de les confondre ; je crois qu'il est à propos pour éviter au lecteur

---

(*) Toutes ces règles sont fondées sur deux relations principales existantes entre les nombres, par lesquelles des nombres étant donnés, ils en déterminent deux autres : l'un qu'on appelle leur somme, et l'autre leur produit. Tous les auteurs élémentaires, au lieu d'en presenter l'idée sous le point de vue le plus général, en ont tiré les premières définitions du cas le plus particulier, celui des nombres entiers, et cette idée étant dès lors absolument incomplète a semble en contradiction avec celle qu'il fallait se former de la somme et du produit, relativement aux autres nombres; telle est la source de l'obscurité dont j'ai parlé tout à l'heure et que j'ai surtout cherche à eviter.

l'ennui et l'embarras des longues périphrases, de désigner ces quatre grandeurs, comme les mathématiciens et quelques métaphysiciens désignent les objets dont ils traitent, je veux dire par les lettres de l'alphabet.

Soient donc, A et B, deux grandeurs de même espèce entre lesquelles on suppose une inégalité quelconque; C et D, deux grandeurs aussi homogènes entre elles, qui peuvent indifféremment être ou ne pas être de l'espèce des deux premières A et B, et qui déterminent une seconde inégalité : la comparaison de ces deux inégalités, ne pourra plus éprouver aucune difficulté dès qu'on se sera fait une idée juste de ce qu'on doit précisément entendre par deux inégalités de même valeur. Le seul cas où cette idée n'ait pas besoin d'éclaircissement est celui où A est égal à C, car il est clair qu'il faut alors que B le soit aussi à D, pour que l'inégalité de A et de B soit la même que celle de C et de D.

Dans tout autre cas on ne peut se faire une idée bien nette de cette identité de valeurs, qu'en considérant la plus petite *des deux grandeurs A et B, comme égale à une* portion de la plus grande et de la plus petite des deux grandeurs C et D, sous le même point de vue relativement à la plus grande. Le changement par lequel les deux plus grandes seraient respectivement réduites à la même valeur que les deux plus petites, *consiste alors dans une opération par laquelle* on en détruit ou du moins on en sépare la portion restante, et comme cette opération détermine évidemment l'inégalité qui se trouve entre les deux grandeurs *qu'elle ramène à l'égalite*, on s'assurera que l'inégalité de A et de B, est la même que celle de C *et de D, lorsque cette opération sera précisément* la même dans les deux cas.

Si l'on ne considère dans ces deux opérations que la portion retranchée, elle sera dans la première homogène à A et à B, dans la seconde à C et à D, on ne pourra donc comparer les inégalités déterminées de cette manière, que dans le cas où les quatre grandeurs seraient de même nature.

Il y a une autre manière de considérer la même opération qui paraît moins simple et moins naturelle, mais qui a l'avantage de permettre la comparaison des deux inégalités, soit que les deux grandeurs homogènes A et B, soient ou ne soient pas de même nature que C et D, et qui est d'ailleurs le seul moyen d'établir des relations entre des grandeurs hétérogènes, en ne comparant d'abord, à la vérité, que des homogènes, mais en comparant ensuite les résultats de ces premières comparaisons.

Cet autre moyen de se faire une idée précise de l'opération, par laquelle nous pourrions séparer (*), de la plus grande de deux grandeurs, les parties qu'elle a de plus que l'autre, consiste à la partager en un certain nombre de parties égales, et à prendre ensuite un nombre déterminé de ces parties pour en former une réunion égale à la plus petite. Pour que l'inégalité de A et de B, considérée de cette manière, soit égale à celle de C et de D, il est évident d'après la définition que nous avons donné du nombre que celui qui exprime la manière d'être respective des deux premières grandeurs, soit le même que celui qui détermine celle des deux dernières.

Il ne faut pas croire que ces deux manières de considérer les inégalités donnent les mêmes résultats quand il s'agit de les comparer, il est aisé de voir, au contraire, que deux inégalités peuvent très-bien avoir la même valeur quand on les

(*) Au lieu de déterminer ainsi l'inégalité de deux grandeurs, par la diminution qu'il convient de faire éprouver à la plus grande, pour qu'elle devienne égale à la plus petite, j'aurais pu considérer l'augmentation que celle-ci devrait éprouver pour devenir égale à la plus grande, mais la première m'a paru plus aisee à comprendre comme plus analogue à l'action physique que nous pouvons exercer sur les objets dont nous sommes environnés, qui nous donne le moyen d'en détruire ou d'en séparer quelques parties, plutôt que celui d'en ajouter de nouvelles.

considère sous un de ces deux points de vue, et des valeurs très-différentes sous l'autre. C'est pourquoi il en résulte, comme on le verra plus en détail dans le livre deux, une double sorte de calcul fondée sur les mêmes opérations, mais absolument différente dans ses résultats. Ce sont les conditions particulières à chaque question qui déterminent la manière dont il faut comparer les inégalités qui se trouvent entre les grandeurs dont on s'occupe ; pour éclaircir ce que je viens de dire, prenons des exemples simples et familiers à tout le monde. Supposons d'abord que A et B soient les âges de deux hommes, à une certaine époque ; D et C leurs âges à une autre époque : il est évident que l'inégalité, considérée sous le premier point de vue, sera la même dans les deux cas, puisqu'elle dépend toujours seulement de l'intervalle de temps qui s'est trouvé entre la naissance de l'un et celle de l'autre ; maintenant si A et B désignent les longueurs de deux pièces d'une même étoffe, C et D, leurs prix, il devra encore y avoir la même inégalité entre A et B, qu'entre C et D, mais les deux premières grandeurs n'étant pas homogènes aux deux autres, ces deux inégalités ne pourront être comparées qu'en les considérant comme déterminées par des nombres.

C'est dans la comparaison de deux inégalités de même valeur, d'après les définitions précédentes, que l'on retrouve l'idée du nombre *un*, telle que nous l'avions déduite de la comparaison des grandeurs mêmes. Voyons comment on peut retrouver, dans celle de deux inégalités de valeurs différentes, tous les autres nombres, dont nous avons déjà parlé pour déterminer d'abord deux changements, dont la comparaison donne pour résultats les nombres entiers deux, trois, quatre, etc. ; et leurs réciproques : demi, tiers, quart, etc. Il suffit de concevoir que la même opération qui, exécutée sur la grandeur C, a produit une nouvelle grandeur D, dont la différence à C soit la même que celle qui se trouve entre A et B, soit répétée d'abord sur la grandeur D, et en produise une nouvelle E ; ensuite sur cette grandeur E et en produise une nouvelle F, et ainsi de suite, car il est évident que l'inégalité qui se trouvera alors entre C et E, comparée à celle de A et B, donnera le nombre deux, que celle qui se trouvera entre C et F. ..

Table de l'introduction

1. Définition du calcul
2. Réflexion sur ses operations les plus simples.
3 Avantages du calcul écrit sur celui qui n'est qu'intellectuel
4. Restriction ordinaire de la signification du mot calcul, borné dans l'usage au calcul écrit.
5. Idée du nombre tiree de celle de la grandeur, definition de ce dernier mot
6 D'une espèce particulière de grandeur, que j'appellerai quantité proprement dite.
7 Comment il arrive que les autres grandeurs peuvent être aussi considerees comme des quantites.
8. Manière de parvenir à une connaissance precise d'un objet quelconque
9. Le moyen le plus genéral pour cela donne naissance aux nombres
10. Condition nécessaire à la comparaison de deux grandeurs.
11. Definition des grandeurs homogènes et héterogènes.
12 Réflexion particulière à ce sujet.
13. Réflexion sur une autre espèce de grandeurs
14. Suite des articles 8 et 9, invention des mesures
15. Avantages qu'on retire de l'usage des nombres.
16. A quoi se reduit la détermination des nombres qui se trouvent dans les grandeurs les plus à notre portee
17. Quelles sont les ressources qui nous restent en cas contraire, idée des relations qui existent entre diverses grandeurs.
18 Eclaircissements et exemples
19 Distinction entre les calculs elementaire, superieur et transcendant
20. Explication de la plus simple relation qui puisse exister entre deux grandeurs, et du nombre un qui en est le resultat.
21. Explication de ce qu'on entend par grandeurs egales et inegales
22. Signes d'egalite et d'inegalite.
23. Des nombres qu'on decouvre successsivement après un
24. Première espèce de nombres les entiers.
25. Reflexion sur l'usage qu'on fait, en mathematiques, des mots unite et quantité.
26 Seconde espèce de nombres les *rompus*
27. Suite de l'article 25
28. Troisième espèce de nombres les irrationnels
29 Suite des articles 25 et 27.
30. Définition des nombres reciproques
31 Explication de la manière dont on s'aperçoit de l'existence des nombres irrationnels

32. Suite de l'article précédent; définition du mot incommensurable.
33. Des nombres rompus approximatifs qu'il convient de substituer aux irrationnels.

Note. Le manuscrit finit à l'article 33, qui devait servir à expliquer l'origine de la distinction entre les nombres positifs et négatifs. L'illustre auteur cite le livre premier et le livre second de l'ouvrage, auquel le manuscrit sert d'introduction.

Nous reproduirons quelques fragments de cet ouvrage, déjà publiés dans la correspondance mathématique de M. Quetelet, et tout ce qu'on voudra bien nous communiquer.

Tm.