NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ALFRED RODRIGUES

Note sur la discussion de l'équation générale du deuxième degré à deux inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 24-28

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__24_1>

NOTE

sur la discussion de l'équation générale du deuxième degré à deux inconnues.

PAR M. ALFRED RODRIGUES.

1. Soit

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

l'équation d'une courbe dite du deuxième degré, si x et y

sont les coordonnées rectilignes d'un point dont l'angle est G.

2. Si je suppose que (x', y') soit un point de la courbe, l'équation (1) pourra être mise sous la forme (2) :

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} [2A(y+y')+B(x+x')+2D](y-y')+ \\ +[B(y+y')+2C(x+x')+2E](x+x')=0. \end{array} \right.$$

3. $y-y'=m(x-x')$ est l'équation d'une droite passant par le point (x', y'), elle peut représenter à volonté ou des cordes parallèles ou des sécantes à la courbe en (x', y'), suivant que l'on supposera m ou y', x' constants.

4. Soit m constant, l'équation (2), en y faisant entrer m, deviendra celle du lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à la direction m.

$$(3)\qquad (2Ay+Bx+D)m+By+2Cx+E=0,$$

d'où l'on conclut que ce lieu est une droite dont le coefficient angulaire m' est tel que

$$(4)\qquad 2Amm'+B(m+m')+2C=0,$$

ou que

$$(2Am+B)(2Am'+B)=B^2-4AC,$$

ce qui permet de distinguer les trois espèces des courbes du deuxième degré par leurs différences caractéristiques.

Si $B^2-4AC<0$, m n'est jamais égal à m', et il y a une infinité de diamètres conjugués,

$B^2-4AC=0$, quel que soit m, $\quad m'=-\dfrac{B}{2A}$,

$B^2-4AC>0$, m est égal à m' pour les valeurs

$\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4HC}}{2A}$, et il y a une infinité de diamètres conjugués.

5. Une autre conséquence de la forme de l'équation (3), c'est que toutes les courbes, dont les équations ne diffèrent que par le terme F, ont les mêmes diamètres. On en dé-

duira une construction très-facile, pour une courbe du deuxième degré, étant donnés un de ses points et une courbe de même espèce, et dont l'équation ne différerait de la sienne que par le terme tout connu.

6. Supposons maintenant que (x', y') soit fixe et que m varie, l'équation (2) pourra se mettre sous la forme

$$(5) \qquad y = m'x + k,$$

où k est une fonction du premier degré de (x', y'), et est par conséquent déterminée pour ce point (x', y''). La droite, que cette équation représente devra contenir le deuxième point d'intersection de la sécante passant par (x', y'), si cela arrive. Or il est évident qu'il y aura un point d'intersection tant que m ne sera pas égal à m', ou tant que l'on n'aura pas

$$(6) \qquad Am^2 + Bm + C = 0,$$

équation qui n'est possible que si $B^2 - 4AC =$ ou > 0.

7. L'équation (6) démontre donc ce que l'équation (4) nous avait fait pressentir en passant aux limites, c'est que dans les courbes où $B^2 - 4AC = 0$, il y a un système de droites parallèles qui ne rencontrent la courbe qu'en un seul point, et dont, par conséquent, le diamètre conjugué est parallèle à leur direction, et que dans celles où $B^2 - 4AC > 0$, il existe deux systèmes de droites parallèles qui ne rencontrent la courbe qu'en un point; ces considérations permettent de ranger les courbes du deuxième degré en courbes fermées, pouvant se réduire à une portion de droite $B - 4AC < 0$, courbes à deux branches infinies, $B^2 - 4AC = 0$, et enfin les courbes à quatre branches infinies, pouvant se réduire à deux droites $B^2 - 4AC > 0$, et, dans ce dernier cas, il est toujours facile d'obtenir deux droites ayant les mêmes diamètres que la courbe proposée

8. L'équation (2) nous donne directement les coordonnées

d'un point, tel que toute corde y passant, y soit divisée en deux parties égales. En effet, si l'on désigne par (a, b) les coordonnées d'un point O tel que

$$(7)\qquad \begin{cases} 2Ab + Ba + D = 0, \\ Bb + 2Ca + E = 0. \end{cases}$$

En effet si $\frac{y+y'}{2} = b$, $\frac{x+x'}{2} = a$, le point O est le centre de la courbe. Les équations (7) sont compatibles pour $\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} = \frac{D}{E}$, d'une infinité de manières, et incompatibles pour $B^2 - 4AC = 0$, $2AE - BD \lessgtr 0$, on en voit aisément la raison.

9. On conclut facilement de l'équation (2) quelles sont les courbes du deuxième degré, où le centre est un point de la courbe, car, si l'on considère, une transformation très-simple change cette équation en celle-ci :

$$(8)\quad A(y-b)^2 + B(y-b)(x-a) + C(x-a)^2 = 0;$$

cette équation peut se décomposer en deux autres du premier, la courbe est donc un système de deux droites qui se rencontrent au point (b, a), ou une seule droite, si $B^2 - 4AC = 0$, et même un point si $B^2 - 4AC < 0$.

10. Dans le cas où $B^2 - 4AC > 0$, l'équation (8) représente en général les deux droites dont le système est une courbe concentrique et semblable à la courbe proposée, et dont l'équation est (2) ou (1).

11. Toutes les courbes du deuxième degré, ayant un centre, peuvent avoir une équation de la forme suivante :

$$(9)\quad A(y-b)^2 + B(y-b)(x-a + C(x-a)^2 = k.$$

(12) On eût pu déduire le centre de la rencontre des diamètres conjugués en partant de l'équation (3).

13. Une tangente est une corde qui ne rencontre la courbe qu'en un point, ou dont les deux points d'intersection se confondent. Soit donc (x', y') le point de tangente d'une droite, et m son coefficient angulaire, le diamètre conjugué des cordes parallèles à cette tangente, devra rencontrer la courbe au point (x', y') ; on aura donc identiquement

$$(2Ay' + Bx' + D)\, m + By' + 2Cx' + E = 0.$$

L'équation de la tangente à la courbe au point (x', y') est donc

$$(10) \qquad y - y' = \frac{By' + 2Cx' + E}{2Hy' + Bx' + D}(x - x'),$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante, symétrique par rapport à xy, $x'y'$:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2Ayy' + B(xy' + x'y) + 2Cxx' + D(y + y') + \\ \qquad + E(x + x')AF = 0. \end{array} \right.$$

On en déduit plusieurs conséquences connues sur les sécantes et les lignes de contact. Il est bon de remarquer qu'une méthode tout à fait semblable s'appliquerait parfaitement à la discussion de l'équation générale du deuxième degré à trois inconnues.