QUILLET

Note sur la solution analytique des problèmes et sur un problème d'arithmétique sociale

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 249-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__249_1>

NOTE

sur la solution analytique des problèmes et sur un problème d'arithmétique sociale.

PAR M. QUILLET,
ancien élève de l'École normale.

I. Lorsque la solution analytique d'un problème particulier dépend de l'emploi des modes les plus généraux de représenter et de combiner les quantités, il n'est pas indifférent de résoudre l'équation finale, à laquelle il conduit, par telle ou telle méthode de calcul. Il faut surtout se guider sur la nature de celui-ci, dans le choix de la méthode à suivre pour arriver à sa véritable solution. Il est encore plus nécessaire de ne pas perdre de vue son énoncé particulier, lorsqu'une restriction de cet énoncé, originairement exprimée dans le calcul, à l'aide de signes algébriques, peut disparaître dans son développement suivant la manière dont ce calcul est dirigé; pour trouver des exemples de ces deux circonstances, il suffit d'avoir recours à la théorie des fonctions symétriques et à celle des combinaisons.

1° Quand on veut exprimer rationnellement, au moyen des coefficients a, a_2, a_3..... a_m d'une équation donnée du degré (m), la somme des puissances entières, semblables et positives, de degré $m-p$ des racines de cette équation, on parvient à l'une ou à l'autre des deux relations générales suivantes

$$S_{m+p}+a_1S_{m+p-1}+a_2S_{m+p-2}+\ldots a_mS_p=0,$$

$$S_{m-p}+a_1S_{m-p-1}+\ldots\frac{m-p}{m}a_{m-p}S_0=0.$$

2° Lorsqu'on veut déterminer, sans employer le raisonnement par induction, les formules qui donnent par des produits de facteurs le nombre de combinaisons simples d'espèce donnée, que l'on peut faire avec m lettres différentes, on arrive de diverses manières aux équations suivantes :

$$P_m=mP_{m-1},\qquad C_m^n=\frac{m-n+1}{n}C_m^{n-1},$$

$$A_m^n=mA_{m-1}^{n-1},\qquad C_m^n=\frac{m}{n}C_{m-1}^{n-1},$$

$$A_m^n=(m-n+1)A_m^{n-1},\qquad C_m^n=\frac{A_m^n}{P_n},$$

$$A_m^n=\frac{m}{m-n}A_{m-1}^n,\qquad C_m^n=\frac{m}{m-n}C_{m-1}^n.$$

Ces formules, ainsi que les précédentes, ne sont, au fond, que des équations aux différences finies, à une ou à deux variables indépendantes ; et pour en déduire les fonctions discontinues des nombres entiers m, n, p, qui correspondent aux solutions des problèmes ci-dessus énoncés, on emploie ordinairement la méthode des multiplications ou des substitutions successives ; or, il y a une observation à faire sur cette méthode de calcul. Il est indispensable de l'employer dans la solution du premier problème qui répond à l'équation

$$S_{m+p}+a_1S_{m+p-1}+\ldots a_mS_p=0.$$

En effet, l'intégrale complète de cette équation linéaire aux différences finies à coefficients constants, sans second membre, est

$$S_p = C_1 x_1^p + C_2 x_2^p + \dots C_m x_m^p,$$

d'où

$$S_{m+p} = C_1 x_1^{m+p} + C_2 x_2^{m+p} + \dots C_m x_m^{m+p},$$

$C_1, C_2, \dots, C_m$ désignant m constantes arbitraires et $x_1, x_2, \dots x_m$ précisément les m racines de l'équation donnée; en sorte qu'en faisant $C_1 = C_2 \dots C_m = 1$ dans la valeur de S_{m+p}, on serait ramené au point de départ du calcul; puisqu'il s'agit de calculer S_{m+p} en fonction des coefficients de l'équation proposée et sans la résoudre.

Le problème qui dépend de l'équation

$$S_{m-p} + a_1 S_{m-p-1} + \dots \frac{m-p}{m} a_{m-p} S_0 = 0$$

donne lieu à la même remarque. Son intégrale générale n'est pas connue, que je sache; d'ailleurs, pour le résoudre, il faudrait, non recourir à cette intégrale, mais opérer par la méthode des substitutions successives, ce qui ferait connaître l'expression de S_{m-p}. On peut encore calculer les sommes S_{m-p}, $S_{m-p-1} \dots$ en prenant les coefficients des termes du quotient $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$; ces coefficients sont respectivement, dans leur ordre, les sommes S_0, $S1 \dots$, ainsi que M. Desmaret l'a fait voir (p. 169 du I^er vol.).

II. Considérons maintenant à la fois dans la théorie des combinaisons les deux équations

$$A_m^n = \frac{m}{m-n} A_{m-1}^n, \quad C_m^n = \frac{m}{m-n} C_{m-1}^n$$

qui terminent le tableau précédent, et examinons la méthode de calcul qu'il convient d'employer pour leur développement. La seconde se déduit de la première en divisant par P_n chacun des termes de son premier membre ; mais cette restriction s'efface d'elle-même, et ne subsiste pas dans le résultat du calcul des substitutions successives ; en sorte que cette méthode ne fait connaître que la valeur de $A^n{}_m$, et ne peut être employée que pour le développement de la première équation. Il faut donc, pour déterminer la valeur ordinaire de $C^n{}_m$ autrement que par la relation connue

$$C^n_m = \frac{A^n_m}{P_n}$$

avoir recours à l'intégrale générale de l'équation aux différences finies partielles

$$y_{m,\,n} - \frac{m}{m-n}\, y_{m-1,\,n} = 0\,;$$

pour la trouver, faisons $m = l + 1$, observons que l'on a par définition

$$\Delta_l y = y_{l+1,\,n} - y_{l,\,n}\,,$$

et supprimons pour abréger les indices : l'équation précédente pourra être mise sous la forme

$$\Delta y - y\left(\frac{n}{l+1-n}\right) = 0.$$

On peut alors la considérer comme une équation ordinaire aux différences finies du premier degré et du premier ordre, entre deux variables discontinues y et l, n étant regardé comme constant. Son intégrale générale en termes finis, sera donc (*)

$$y = C\varphi\left(1 + \frac{n}{l+1-n}\right) = C\varphi\left(\frac{m}{m-n}\right),$$

$\varphi\left(\frac{m}{m-n}\right)$ désignant le produit de toutes les valeurs de la fraction $\frac{m}{m-n}$ entre les limites de l'intégrale Σ, et C la con-

(*) Lacroix, C. D., t. III.

stante arbitraire, que nous regarderons comme une fonction arbitraire et discontinue du nombre n.

Cela posé, on peut donner à m les valeurs successives entières et positives qui s'étendent depuis le nombre m jusqu'au nombre $2n+1$ y compris ces deux nombres, alors

$$\varphi\left(\frac{m}{m-n}\right)=\frac{m(m-1)\ldots(n+2)(n+1)}{(m-n)(m-n-1)\ldots 3.2.1},$$

et en réduisant

$$\varphi\left(\frac{m}{m-n}\right)=m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

Ainsi, dans cette hypothèse, la valeur générale de $y_{m,n}$ sera

$$y_{m,n}=[m(m-1)\ldots(m-n+1)]\,C;$$

et pour retrouver les valeurs ordinaires de $A^n{}_m$ et $C^n{}_m$, il suffira d'attribuer successivement à C, dans cette dernière formule, les deux valeurs

$$C=1\,,\qquad C=\frac{1}{1.2.3\ldots n}.$$

III. On me pardonnera peut-être à cette occasion de reproduire ici, comme susceptible d'intéresser quelques lecteurs, la solution donnée anciennement par M. Cournot dans le *Bulletin* de Férussac (1830-31), d'un problème d'algèbre légale sur les successions irrégulières; je regrette de ne pouvoir insérer la spirituelle rédaction.—La solution de ce problème, lorsqu'on tient à s'assujettir à la lettre de la loi, dépend de la résolution, par la méthode des substitutions, de deux équations, dont l'une est du premier degré et l'autre aux différences finies à deux variables. En voici l'énoncé et l'analyse sommaire.

Le droit d'un enfant naturel, venant en concurrence avec un au moins ou plusieurs enfants légitimes, est, d'après le code civil français, le tiers de la portion héréditaire qu'il aurait eue s'il eût été légitime. Il s'agit de déduire de cette condition la part de chaque enfant naturel ou légitime, lorsqu'on connaît le nombre des enfants de chaque catégorie, ainsi que le montant de la succession qui doit être répartie entre eux.

n étant le nombre des enfants naturels, l celui des enfants légitimes, et la somme à partager entre eux étant, pour fixer les idées, représentée par l'unité; soient $y_{n,\,l}$ et $x_{n,\,l}$, les parts respectives de chaque enfant naturel et légitime, on aura pour première équation du problème

$$ny_{n,\,l}+lx_{n,\,l}=1. \qquad (1)$$

Supposons maintenant, pour un moment, que l'un des enfants naturels soit considéré comme légitime, la part de chacun des autres enfants naturels sera, dans cette hypothèse, exprimée par la notation $y_{n-1,\,l+1}$, et leur part collective par $(n-1)y_{n-1,\,l+1}$; il restera donc à partager entre les $(l+1)$ enfants supposés tous légitimes, la somme

$$1-(n-1)y_{n-1,\,l+1},$$

et le tiers de la part de chacun d'eux étant égalé à $y_{n,\,l}$, fera connaître la seconde équation du problème, savoir :

$$y_{n,\,l}=\frac{1}{3\,(l+1)}[1-(n-1)y_{n-1,\,l+1}], \qquad (2)$$

en faisant $n=1$ dans cette équation, le second membre se réduit à une quantité connue $\frac{1}{3\,(l+1)}$; ainsi on peut, par des substitutions successives, calculer en fonction des nombres n, l, la valeur générale de $y_{n,\,l}$. En ayant égard aussi à l'équation (1), on trouve pour $y_{n,\,l}$ et $x_{n,\,l}$ les valeurs suivantes ·

$$y_{n,\,l}=\frac{1}{3(l+1)}-\frac{n-1}{3^2(l+1)(l+2)}\cdots\mp\frac{(n-1)(n+2)\ldots3.2.1}{3^n(l+1)\ldots(l+n)},$$

$$x_{n,\,l}=\frac{1}{l}-\frac{n}{3l(l+1)}\cdots\pm\frac{n(n-1)\ldots3.2.1}{3^n l(l+1)\ldots(l+n)},$$

le signe change d'un terme au suivant, dans les deux formules, à partir des premiers termes, qui sont positifs; ainsi il faudra prendre les signes supérieurs ou inférieurs, selon que n sera pair ou impair. Il est donc facile, d'après ces formules, de construire, par avance, une table à double entrée, dont les limites comprennent entre elles toute l'étendue des valeurs éventuelles, que peuvent prendre simultanément n et l.

Note. L'article 757 du code civil est ainsi rédigé. Le droit de l'enfant naturel sur les biens de ses père ou mère décédés est réglé ainsi qu'il suit : « Si le père ou la mère a laissé des descendants légitimes, ce droit est d'un tiers de la portion héréditaire que l'enfant naturel aurait eue s'il eût été légitime : il est de la moitié lorsque les père ou mère ne laissent pas de descendants, mais bien des ascendants ou des frères ou sœurs; il est des trois quarts lorsque les père ou mère ne laissent ni descendants, ni ascendants, ni frères ni sœurs. » Cette rédaction présente quelque obscurité; que faut-il entendre par ces mots : « la portion héréditaire qu'il aurait eue s'il eût été légitime? » à première vue, on croit qu'il s'agit de supposer que tous les enfants sont légitimes, alors chacun aurait $\frac{1}{l+n}$, et par conséquent la part de chaque enfant naturel sera $\frac{1}{3(l+n)}$; mais cette solution est évidemment fautive (*) : il s'ensuivrait que la part de l'enfant naturel serait toujours la même pourvu que $l+n$ fût constante; ainsi qu'il y ait un enfant naturel et l enfants légitimes, ou bien l enfants naturels, et un enfant légitime, la part de l'enfant naturel serait toujours $\frac{1}{3(1+l)}$; telle ne pouvait être la

(*) C'est pourtant celle qu'on lit dans l'excellent commentaire de M. Rogron sur le code. Tm.

pensée du législateur ; mais il faut, comme on fait dans la solution précédente, calculer quelle serait la part de la succession pour chacun des enfants naturels pris isolément, s'il devenait légitime, et prendre ensuite le tiers de cette part ; ce qui fournit l'équation (2). Il y a deux cas qui échappent à cette solution : savoir pour $n = 0$ la valeur de $y_{o,l}$ est évidemment nulle ; posons $l = 0$, l'équation (1) donne $y_{n,o} = \frac{1}{n}$; mais d'après les dispositions de l'art. 757, on aura $y_{n,o} = \frac{1}{2n}$ ou bien $y_{n,o} = \frac{3}{4n}$.

Tm.