NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. WOESTYN

Théorèmes sur les tangentes aux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 244-249

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__244_1>

THÉORÈMES

sur les tangentes aux côniques.

PAR M. A. WOESTYN,
élève de M. AMIOT (pension BARBET).

AT et AS sont deux droites qui touchent une section conique quelconque aux points B et C ; on mène une troisième tangente quelconque DE, et par les points D et E, où elle rencontre les deux premières, on trace des parallèles à ces tangentes (*fig*. 25).

On propose :

1° De déterminer le lieu des points d'intersection M de ces parallèles ;

2° De reconnaître que l'angle EFD, sous lequel on voit, de l'un des foyers de la section conique F, la tangente mobile ED, conserve une valeur constante dans toutes les positions de cette tangente.

3° On examinera le cas particulier où la section conique est une parabole, et l'on fera voir que dans ce cas les segments interceptés sur les portions AB, AC des tangentes fixes par la tangente mobile sont réciproquement proportionnels.

I. Je prends pour axes des coordonnées, les deux tangentes fixes ; j'appelle a et b les distances de l'origine aux points de tangence C et B.

La section conique donnée a pour équation une expression de la forme

$$y^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0.$$

Il faut exprimer que cette courbe est tangente aux deux axes des coordonnées aux points C et B. Il est nécessaire pour cela que les équations que l'on obtient en faisant alternativement $y=0$ et $x=0$ dans l'équation de la courbe aient deux racines égales, la première à a, la seconde à b ; pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que les coefficients de l'équation et les quantités a et b satisfassent aux relations suivantes :

$$E^2=CF \qquad D^2=F$$

$$a=-\frac{E}{C} \qquad b=-D$$

On peut remplacer ces quatre relations par celles-ci :

$$C=\frac{b^2}{a^2} \qquad E=-\frac{b^2}{a}$$

$$D=-b \qquad F=b^2.$$

Je substitue dans l'équation de la courbe, aux coefficients C, D, E, F leurs valeurs ; cette équation devient :

$$y^2+2Bxy+\frac{b^2}{a^2}x^2-2by-2\frac{b^2}{a}x+b^2=0$$

Je pose pour simplifier $\frac{b^2}{a^2}=K$

$$y^2+2Bxy+Kx^2-2by-2Kax+b^2=0$$

Soit maintenant $y=mx+n$ l'équation de la droite ED, pour exprimer que cette droite est tangente à la courbe, je vais remplacer dans l'équation de la courbe y par sa valeur tirée de l'équation de la droite, et poser que l'équation résultante en x a deux racines égales. Cette condition se traduit par

$$(mn - bm - aK + Bn)^2 = (m^2 + 2Bm + K)(n^2 - 2bn + b^2)$$

Si je développe, j'obtiendrai, toutes simplifications faites, en observant que $K = \frac{b^2}{a^2}$,

$$n^2\left(B^2 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 2mnb\left(\frac{b}{a} - B\right) - 2Ka\left(B - \frac{b}{a}\right)n + 2b^2\left(\frac{b}{a} - B\right)m = 0.$$

Je supprime le facteur $B - \frac{b}{a}$

$$n^2\left(B + \frac{b}{a}\right) + 2mnb - 2aKn - 2b^2m = 0$$

En appelant x et y, les coordonnées à l'origine de la droite ED, coordonnées qui sont en même temps les coordonnées courantes du lieu cherché, j'ai $n = y$ et $m = -\frac{y}{x}$; substituant à m et à n leurs valeurs dans l'équation précédente, je trouve pour celle du lieu, après la suppression du facteur y qui donne l'axe des x, solution qui ne saurait convenir :

$$\left(B + \frac{b}{a}\right)xy - 2by - 2aKx + 2b^2 = 0$$

C'est l'équation d'une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées, et qui passe par les deux points B et C.

Si je suppose que la courbe donnée soit une parabole, j'ai $B^2 = K$, d'où $B = \pm \frac{b}{a}$. En prenant le signe $+$, je trouve que l'équation de la courbe donnée est $\left(y + \frac{b}{a}x - b\right)^2 = 0$, cette équation représente alors la droite des contacts B, C. Je rejette cette hypothèse : en prenant le signe $-$ au contraire, la courbe donnée est une vraie parabole et j'obtiens pour l'équation du lieu

$$y+\frac{b}{a}x-b=0$$

c'est précisément l'équation de la droite qui unit les points de contact.

II. Il est aisé de voir que la tangente mobile coupe les deux tangentes fixes en des segments qui sont réciproquement proportionnels. Car DM étant parallèle à AC, j'ai

$$BD : AD = BM : MC,$$

j'ai pareillement

$$AE : EC = BM : MC$$

et à cause du rapport commun

$$BD : AD = AE : EC.$$

III. Je vais démontrer que l'angle formé par la réunion du foyer aux points d'intersection des tangentes fixes par la tangente mobile est constant.

Je rappellerai ce théorème. Dans toute section conique, la ligne qui joint le point de rencontre d'une sécante et de la directrice au foyer correspondant est bissectrice de l'angle supplémentaire de l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont du foyer aux points d'intersection de la sécante et de la courbe.

Je vais faire voir maintenant que la ligne qui unit le point, d'où l'on a mené les deux tangentes fixes à la section conique, et le foyer, est bissectrice de l'angle formé par les deux rayons vecteurs partant du foyer pour aller aux points de contact.

Je supposerai qu'il s'agisse par exemple d'une ellipse : il me suffit de démontrer que la ligne KF (fig. 26) est perpendiculaire sur celle qui unit le foyer au point où la corde des contacts rencontre la directrice correspondante au foyer que je considère.

Je prends l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes pour axes des coordonnées; j'appelle x'', y'' les coordonnées du point K : le coefficient angulaire de la droite KF sera $\frac{y''}{x''-c}$; celui de la droite IF, les coordonnées du point I étant $\frac{a^2}{c}$, $\frac{b^2(c-x'')}{y''}$, sera $\frac{c+x''}{y''}$; le produit de ces deux coefficients angulaires étant égal à -1, les deux droites sont rectangulaires, et la ligne KF est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.

Il est facile maintenant de résoudre la question proposée. Soit une tangente HH′, j'unis les points H, R, H′ au foyer ; j'ai, en vertu du théorème précédent, RFH′ = H′FM′, RFH = HFM ; je conclus de là que l'angle HFH′ est constant et égal à la moitié de l'angle MFM′.

Il est aisé de voir de plus que, dans le cas de la parabole, cet angle est supplémentaire de l'angle des tangentes fixes, car cet angle étant le même, quelle que soit la position de la tangente mobile, il aura cette valeur constante quand la tangente sera perpendiculaire à l'axe de la parabole, mais alors les lignes FH et FH′ sont perpendiculaires sur les tangentes fixes, puisque le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes est la tangente au sommet, les deux angles en H et H′ étant droits dans le quadrilatère KHFH′, il suit bien que l'angle en F est supplémentaire de l'angle en K.

Ce quadrilatère étant inscriptible, on voit que le lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites données est la circonférence circonscrite au triangle formé par la rencontre de ces droites.

Note. Le théorème 1 est une conséquence immédiate de l'équation donnée (t. III, p. 188) ; savoir

$$2kab^2 + 2k'ba^2 - lb^2 + 2nab - l'a^2 - ma^2b^2 = 0\,;$$

les axes touchant la courbe, on a $l = l' = 0$; l'équation devient divisible par ab, et l'on a $2kb+2k'a+2n-mab=0$, hyperbole dont a et b sont les coordonnées courantes ; les coordonnées du centre de l'hyperbole sont doubles des coordonnées du centre de la conique donnée.

Le théorème 2 a déjà été démontré (t. II, p. 535, et t. III, p. 439).

Le théorème 3 a déjà été démontré (t. I, p. 449 et t. III, p. 184).

Tm.