AUGUSTE DELADÉRÉERE

Concours d'agrégation, composition d'analyse proposée en 1844

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 238-244

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__238_0>

CONCOURS D'AGRÉGATION.

Composition d'analyse proposée en 1844.

PAR M. AUGUSTE DELADÉRÉERE,
professeur, licencié ès sciences physiques et mathématiques.

—

Intégrer les deux équations

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt}-2\frac{dy}{dt}+9y-2x=0,$$

$$(2)\qquad \frac{dy}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}-6x+y=\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Si je pose pour simplifier

$$\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=\mathrm{T}.$$

Les équations proposées prendront la forme

$$\frac{dx}{dt}-2\frac{dy}{dt}+9y-2x=0,$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}-6x+y=\mathrm{T}.$$

Ce sont deux équations simultanées linéaires, la deuxième avec un second membre et du deuxième ordre; pour les intégrer, je vais les ramener à un système d'équations simultanées du premier ordre, et pour y parvenir je n'aurai qu'à poser $\frac{dx}{dt}=z$, d'où $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dz}{dt}$, et j'aurai ainsi en substituant ces valeurs dans les deux équations précédentes, et y joignant $\frac{dx}{dt}-z=0$,

$$\frac{dx}{dt} - z = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 9y - 2x = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + 5\frac{dx}{dt} - 6x + y = \mathrm{T},$$

Qui représentent le système de trois équations simultanées linéaires et du premier ordre, à coefficient constant entre quatre variables. Afin de n'avoir qu'un seul coefficient différentiel dans chaque équation, j'élimine $\frac{dx}{dt}$ entre la première et la deuxième, et $\frac{dx}{dt}$ avec $\frac{dy}{dt}$, entre les trois équations, multipliant ensuite par dt, j'obtiens les équations suivantes :

$$dx - zdt = 0, \tag{3}$$

$$dy + \left(x - \frac{9}{2}y - \frac{1}{2}z\right)dt = 0, \tag{4}$$

$$dz + \left(7x - \frac{11}{2}y - \frac{11}{2}z\right)dt = -\mathrm{T}dt. \tag{5}$$

Ce sont trois équations simultanées linéaires et du premier ordre à coefficients constants, la dernière avec un deuxième membre.

Afin de les intégrer je multiplie (4) et (5) respectivement par deux facteurs indéterminés θ_1, θ_2, et j'ajoute (3) avec les produits, ce qui me donne

$$\left.\begin{aligned} &dx + \theta_1 dy + \theta_2 dz + \left\{ (\theta_1 + 7\theta_2)\,x - \frac{1}{2}(9\theta_1 + 11\theta_2)y - \right. \\ &\left. \qquad - \frac{1}{2}(2 + \theta_1 + 11\theta_2)\,z \right\} dt = -\theta_2 \mathrm{T}dt. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Or je vois actuellement que cette équation deviendra une équation linéaire à deux variables :

$$du + \theta u dt = -\theta_2 \mathrm{T}dt, \tag{7}$$

qui aura pour intégrale

$$(8)\quad u=x+\theta_1 y+\theta_2 z=e^{-\theta t}\left\{ G-\theta_2\int_0^t Te^{\theta t}dt\right\}.$$

Si je choisis θ_1 et θ_2 de manière à satisfaire aux équations

$$\left.\begin{array}{r}\theta_1+7\theta_2=\theta.\\ 9\theta_1+11\theta_2=-2\theta_1\theta\\ 2+\theta_1+11\theta_2=-2\theta_2\theta\end{array}\right\}\text{ ou bien }\left\{\begin{array}{ll}(9) & \theta_1+7\theta_2=\theta,\\ (10) & (9+2\theta)\theta_1+11\theta_2=-0,\\ (11) & \theta_1+(11+2\theta)\theta_2=-2.\end{array}\right.$$

Car alors l'équation (6) deviendra

$$(12)\quad dx+\theta_1 dy+\theta_2 dz+\left\{x+\theta_1 y+\theta_2 z\right\}\theta dt=-\theta_2 Tdt;$$

et en posant dans celle-ci :

$$x+\theta_1 y+\theta_2 z=u,$$

et différentiant cette dernière équation en y, considérant θ_1 et θ_2 comme constants (ce qui est permis d'après le système des équations (9), (10) et (11), qui sont au nombre de trois à trois inconnues), il viendra

$$dx+\theta_1 dy+\theta_2 dz=du,$$

et en substituant ces valeurs de $x+\theta_1 y+\theta_2 z$ et $dx+\theta_1 dy+\theta_2 dz$, dans (12) on obtient l'equation (7), dans laquelle θ est aussi constant. Ce qui fait que son intégrale est (8), d'après ce qu'on sait sur l'intégration de l'équation linéaire du deuxième ordre avec un second membre.

Des équations (10) et (11), on tire pour θ_1 et θ_2 les valeurs suivantes.

$$\theta_1=\frac{11}{44+20\theta+2\theta^2},$$

$$\theta_2=-\frac{9+2\theta}{44+20\theta+2\theta^2};$$

substituant dans l'équation (9), on trouve en réduisant :

$$(13)\qquad \theta^3+10\theta^2+29\theta+26=0.$$

Équation du troisième degré qui résolue par rapport à θ donne les trois racines $\theta=-2$, $\theta''=-4+\sqrt{3}$, $\theta'''=-4-\sqrt{3}$, qui sont réelles et inégales, si on substitue successivement ces trois valeurs de θ dans les valeurs de θ_1 et θ_2, on en déduira pour chacune trois valeurs correspondantes, et l'on aura ainsi les trois systèmes renfermés dans le tableau suivant :

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{llll} \text{valeurs de} & \theta, & \theta_1, & \theta_2, \\ 1^{er} \text{ système} & -2, & \frac{11}{8}, & -\frac{5}{8}, \\ 2^{e} \text{ système} & \sqrt{3}-4, & \sqrt{3}-\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, \\ 3^{e} \text{ système} & -\sqrt{3}-4, & -\sqrt{3}-\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

En substituant successivement chacun de ces systèmes dans (8), on aura trois intégrales renfermant chacune une constante arbitraire différente, de façon que leur ensemble formera le système des intégrales générales du système des équations simultanées (3), (4) et (5).

Mais avant de faire cette substitution cherchons à ramener $\int_0^t e^{\theta t}\mathrm{T}dt$, qui représente une intégrale double d'après la forme de T, à une intégrale simple, et pour cela intégrons par parties : il viendra

$$\int_0^t e^{\theta t}\mathrm{T}dt = \frac{1}{\theta} e^{\theta t}\mathrm{T} - \frac{1}{\theta}\int_0^t e^{\theta} \frac{d\mathrm{T}}{dt}\, dt,$$

remplaçant T par sa valeur l'équation précédente deviendra

$$\int_0^t e^{\theta t}\mathrm{T}dt = \frac{1}{\theta} e^{\theta t} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \frac{1}{\theta}\int_0^t \frac{e^{\theta}\, dt}{\sqrt{1+t^4}},$$

et substituant cette valeur dans l'équation (8), on trouve

$$(15)\; x+\theta_1 y+\theta_2 z = e^{-\theta t}\left\{ \mathrm{G} - \frac{\theta_2}{\theta}\left(e^{\theta t}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^t \frac{e^{\theta t}\, dt}{\sqrt{1+t^4}} \right)\right\}.$$

Si actuellement on substitue successivement dans cette équation pour $\theta, \theta_1, \theta_2$ leurs systèmes de valeurs indiquées (14), et qu'on représente par G_1, G_2 et G_3 les trois constantes arbitraires, on aura toutes réductions faites :

$$(16)\quad x+\frac{11}{8}y-\frac{5}{8}z=e^{2t}\left\{G_3+\frac{5}{16}\left(e^{-2t}\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\int_0^t\frac{e^{-2t}dt}{\sqrt{1+t^4}}\right)\right\},$$

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} x+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)y+\frac{1}{2}z=e^{(4-\sqrt{3})t} \\ \left\{G_2+\frac{4+\sqrt{3}}{26}\left(e^{-(4-\sqrt{3})t}\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\int_0^t\frac{e^{-(4-\sqrt{3})t}dt}{\sqrt{1+t^4}}\right)\right\}, \end{array}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} x-\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)y-\frac{1}{2}z=e^{(4+\sqrt{3})t} \\ \left\{G_3-\frac{4-\sqrt{3}}{26}\left(e^{-(4+\sqrt{3})t}\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\int_0^t\frac{e^{-(4+\sqrt{3})t}dt}{\sqrt{1+t^4}}\right)\right\}, \end{array}\right.$$

et ces équations seront les intégrales générales des équations (3), (4), (5); car elles renferment trois constantes distinctes, ainsi que l'exige le système en question.

Maintenant pour obtenir les intégrales générales du système proposé (1) et (2), il est évident qu'il suffit d'éliminer z entre les équations intégrales précédentes (16), (17) et (18) prises deux à deux ; par conséquent en éliminant z entre (16) et (17), (17) et (18), et faisant les réductions, on aura pour les intégrales en question :

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} 9x+(3+5\sqrt{3})y=e^{2t}\left\{G_1+G_2e^{(2-\sqrt{3})t}\right\}+\frac{5(13+2\sqrt{3})}{52} \\ \int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\frac{5}{4}e^{2t}\left\{\int_0^t\frac{e^{-2t}dt}{\sqrt{1+t^4}}+4e^{(2-\sqrt{3})t}\int_0^t\frac{e^{-(4-\sqrt{3})t}dt}{\sqrt{1+t^4}}\right\}, \end{array}\right.$$

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} 2x-y=e^{(4-\sqrt{3})t}\left\{G_2+G_3e^{2\sqrt{3}t}\right\}+\frac{\sqrt{3}}{13}\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}-\frac{4+\sqrt{3}}{26} \\ e^{(4-\sqrt{3})t}\left\{\int_0^t\frac{e^{-(4-\sqrt{3})t}dt}{\sqrt{1+t^4}}+\frac{19-8\sqrt{3}}{13}e^{2\sqrt{3}t}\int_0^t\frac{e^{-(4+\sqrt{3})t}dt}{\sqrt{1+t^4}}\right\} \end{array}\right.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que ces deux intégrales (19) et (20) du système (1) et (2) renferment bien le nombre de constantes arbitraires que doivent renfermer les intégrales générales ; car ce nombre doit être $(2+1)=3$.

On pourrait, si l'on voulait, déduire des intégrales précédentes, les valeurs de x et y en fonction de t.

La question proposée a été ainsi ramenée aux quadratures, et l'on voit que ces quadratures se trouvent ramenées à l'intégration de deux intégrales, ayant les formes suivantes.

La première $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, que l'on intégrera par les fonctions elliptiques.

La deuxième $\int_0^x \frac{e^{ax}dx}{\sqrt{1+x^4}}$, qui constitue une nouvelle transcendante irréductible.

Remarque sur la solution précédente. L'intégration des équations (1) et (2) peut être effectuée plus rapidement, à l'aide du procédé suivant, qui est applicable à beaucoup de cas.

Mettons l'équation (1) sous la forme

$$\frac{dx}{dt} - 2x = 2\frac{dy}{dt} - 9y.$$

Nous pouvons regarder le second membre comme une fonction inconnue de t ; et nous aurons, par la méthode de la variation des constantes :

$$x = Ae^{2t}, \quad \frac{dA}{dt} = e^{-2t}\left(2\frac{dy}{dt} - 9y\right).$$

La valeur de x donne

$$\frac{dx}{dt} = e^{2t}\left(2A + \frac{dA}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{2t}\left(4A + 4\frac{dA}{dt} + \frac{d^2A}{dt^2}\right).$$

Substituant dans l'équation (2), on la transforme d'abord en

$$\frac{dy}{dt}+y+e^{2t}\left(\frac{dA}{dt}-\frac{d^2A}{dt^2}\right)=\mathrm{T}.$$

Mais

$$\frac{d^2A}{dt^2}=e^{-2t}\left(18y-13\frac{dy}{dt}+2\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

d'où

$$\frac{dA}{dt}-\frac{d^2A}{dt^2}=e^{-2t}\left(-27y+15\frac{dy}{dt}-2\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

L'équation ci-dessus devient donc

$$-2\frac{d^2y}{dt^2}+16\frac{dy}{dt}-26y=\mathrm{T};$$

et le calcul n'offre plus de difficulé. E. C.