NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OSSIAN BONNET

Note sur les racines imaginaires des équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 236-237

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__236_1>

NOTE

Sur les racines imaginaires des équations algébriques.

PAR M. OSSIAN BONNET,
répétiteur à l'École polytechnique.

On sait depuis longtemps que lorsque les coefficients A, B, C de trois termes consécutifs

$$(1) \qquad Ax^n,\ Bx^{n-1},\ Cx^{n-2},$$

d'une équation (a) vérifient la condition

$$AC \overset{=}{\underset{>}{}} B^2,$$

l'équation a au moins deux racines imaginaires; mais on n'a pas remarqué, je crois, qu'il suffisait que l'on eût :

$$AC \overset{=}{\underset{>}{}} \frac{1}{2} B^2.$$

Voici comment cette dernière proposition peut être établie : supposons qu'en général la condition

$$(2) \qquad AC \overset{=}{\underset{>}{}} nB^2,$$

où n est un nombre quelconque, entraîne l'existence de

(*) (*V.* t. III, p. 234). Tm.

deux racines imaginaires dans l'équation (a). Multiplions le premier membre de cette équation par $x-q$; les termes (1) donneront lieu aux termes

$$Ax^{n+1} \begin{array}{l|l|l} + B & x^n + C & x^{n-1}, \\ + Aq & \quad + Bq & \end{array}$$

et pour que l'équation (a) ait deux racines imaginaires, il suffira, d'après la condition (2), que pour une valeur réelle de q, on ait

$$A\,(C + Bq) \underset{>}{=} n\,(B + Aq)^2.$$

Ce qui donne tout calcul fait :

$$AC \underset{>}{=} \left(1 - \frac{1}{4n}\right) B^2;$$

d'où l'on peut conclure en général que si la condition (2) indique la présence de deux racines imaginaires dans l'équation (a), pour $n = \alpha$, la même propriété subsiste pour $n = 1 - \frac{1}{4\alpha}$. Or quand $n = 1$, la condition (2) devient

$$AC \underset{>}{=} B^2$$

dont l'existence entraîne toujours celle de deux racines imaginaires dans l'équation (a), on peut donc prendre

$$n = \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \text{ etc.}$$

La loi de ces valeurs est facile à saisir ; on peut les représenter par la fraction $\frac{k}{2(k-1)}$, d'où l'on conclut que leur limite est $\frac{1}{2}$. De là résulte la proposition énoncée.

Note. Le théorème d'Euler donne $AC < \frac{n-1}{n} B^2$, pour caractère de l'existence d'imaginaires (v. t. II, p. 257); or n est au moins égal à 2, donc, etc. Tm.