H. FAURE

Solution du problème 91

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 186-194

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__186_0>

SOLUTION DU PROBLÈME 91 (page 55),

PAR M. H. FAURE.

Ce problème doit être rectifié ainsi (*) :

Fig. 18. Si le côté AB du triangle donné ABC est inscrit dans l'angle (xy) fixe MON, l'inclinaison du plan du triangle sur le plan MON étant donnée, le lieu du point C dans l'espace est une ellipse dans laquelle la somme algébrique des *demi-axes* est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle OAB.

Le point C étant assujetti à se mouvoir dans un plan parallèle au plan MON, la courbe décrite par ce point se projette en vraie grandeur sur le plan donné. Or, si j'abaisse CD perdendiculaire sur le plan, il est facile de voir que le point D est invariablement lié à la droite AB, soit parce que les distances BD, AD restent constantes pour toutes les positions du sommet mobile, soit que l'on regarde ce point comme déterminé par la perpendiculaire HD, projection de la hauteur du triangle ABC. Ces deux définitions pourront également fournir l'équation de la courbe décrite par le point D. Employant la première, le problème reviendra à chercher le lieu du sommet d'un triangle dont les deux autres reposent sur deux droites données, problème déjà traité pour le cas particulier où les axes étaient rectangulaires.

Prenons pour axes des coordonnées les deux droites OM, ON, dont je désigne l'angle par θ. Soient x, y les coordonnées du point D. Désignons par a, b, c les côtés respectifs,

(*) Dans l'énonce, on a mis fautivement *axes* au lieu de *demi-axes*. Tm.

AB, BD, AD, et par α, β les directrices OA, OB. Les équations du problème sont :

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos\theta ;$$
$$b^2 = (y - \beta)^2 + x^2 + 2x(y - \beta)\cos\theta ;$$
$$c^2 = (x - \alpha)^2 + y^2 + 2y(x - \alpha)\cos\theta .$$

Eliminons α, β entre ces trois équations.

Les deux dernières donnent :

$$y - \beta = -x\cos\theta + \sqrt{b^2 - x^2\sin^2\theta} = -x\cos\theta^2 + \sqrt{X^2}.$$
$$x - \alpha = -y\cos\theta + \sqrt{c^2 - y^2\overline{\sin}^2\theta} = -y\cos\theta + \sqrt{Y^2},$$

en posant pour abréger :

$$b^2 - x^2\overline{\sin}^2\theta = X^2,$$
$$c^2 - y^2\overline{\sin}^2\theta = Y^2.$$

Je ne prends que l'un des deux signes devant le radical ; le calcul indiquera par la suite qu'il était en effet inutile de les prendre à la fois.

On a par conséquent :

$$\alpha = x + y\cos\theta - \sqrt{Y^2},$$
$$\beta = y + x\cos\theta - \sqrt{X^2},$$

substituant ces valeurs dans la première équation, il viendra :

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2xy\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta - 2y\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{X^2} -$$
$$- 2x\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{Y^2} - 2\cos\theta\sqrt{X^2}\,Y^2,$$

en effectuant toutes les simplifications.

Or, $$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos D,$$
en désignant par D l'angle du sommet, donc :

$$bc\cos D + xy\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta - y\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{X^2} -$$
$$- x\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{Y^2} - \cos\theta\sqrt{X^2Y^2} = 0.$$

Faisons disparaître l'un des radicaux, $\sqrt{\mathrm{X}^2}$ par exemple :

$$bc\cos \mathrm{D} + xy\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta - x\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{\mathrm{Y}^2} =$$
$$= \sqrt{\mathrm{X}^2}\left(\cos\theta\sqrt{\mathrm{Y}^2} + y\,\overline{\sin}^2\theta\right),$$

et en élevant au carré,

$$b^2c^2\,\overline{\cos}^2\mathrm{D} + 2bcxy\cos \mathrm{D}\,\overline{\sin}^2\theta\cos\theta + c^2\sin^4\theta\, x^2 -$$
$$- 2bcx\cos \mathrm{D}\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{\mathrm{Y}^2} = b^2y^2\sin^4\theta + b^2c^2\,\overline{\cos}^2\theta -$$
$$- \overline{\sin}^2\theta\,\overline{\cos}^2\theta\,(b^2y^2 + c^2x^2) + 2b^2y\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{\mathrm{Y}^2}.$$

Réduisant et ordonnant par rapport à x, on trouve l'équation :

$$\begin{array}{r|l} c^2\,\overline{\sin}^2\theta\, x^2 + 2bcy\cos \mathrm{D}\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta & x + b^2c^2\left(\overline{\cos}^2\mathrm{D} - \overline{\cos}^2\theta\right) = 0 \\ - 2bc\cos \mathrm{D}\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{\mathrm{Y}^2} & - b^2y^2\,\overline{\sin}^2\theta\left(\overline{\sin}^2\theta - \overline{\cos}^2\theta\right) \\ & - 2b^2y\,\overline{\sin}^2\theta\cos\theta\sqrt{\mathrm{Y}^2}, \end{array}$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{bc\cos \mathrm{D}\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{\mathrm{Y}^2} - bcy\cos \mathrm{D}\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta \pm \sqrt{\mathrm{A}}}{c^2\,\overline{\sin}^2\theta.}$$

En posant :

$$\mathrm{A} = b^2c^4\,\overline{\cos}^2\mathrm{D}\,\overline{\sin}^2\theta\,\mathrm{Y}^2 + b^2c^2y^2\,\overline{\cos}^2\theta\,\overline{\cos}^2\mathrm{D}\,\overline{\sin}^2\theta$$
$$- 2b^2c^2y\,\overline{\cos}^2\mathrm{D}\cos\theta\,\overline{\sin}^4\theta\sqrt{\mathrm{Y}^2} - b^2c^4\,\overline{\sin}^2\theta\left(\overline{\cos}^2\mathrm{D} - \overline{\cos}^2\theta\right)$$
$$+ b^2c^2y^2\sin^4\theta\left(\overline{\sin}^2\theta - \overline{\cos}^2\theta\right) + 2b^2c^2y\cos\theta\,\overline{\sin}^2\theta\sqrt{\mathrm{Y}^2},$$

ou bien en simplifiant :

$$\mathrm{A} = b^2c^2\,\overline{\sin}^2\theta\,\overline{\sin}^2\mathrm{D}\left(c^2\,\overline{\cos}^2\theta + y^2\,\overline{\sin}^2\theta - y^2\,\overline{\sin}^2\theta\,\overline{\cos}^2\theta +\right.$$
$$\left.+ 2y\,\overline{\sin}^2\theta\cos\theta\sqrt{\mathrm{Y}^2}\right);$$

mais

$$c^2\,\overline{\cos}^2\theta - y^2\,\overline{\sin}^2\theta\,\overline{\cos}^2\theta = \mathrm{Y}^2\,\overline{\cos}^2\theta;$$

donc

$$\mathrm{A} = b^2c^2\,\overline{\sin}^2\theta\,\overline{\sin}^2\mathrm{D}\left(y\,\overline{\sin}^2\theta + \cos\theta\sqrt{\mathrm{Y}^2}\right)^2.$$

et partant,

$$x=\frac{bc\cos D\sin^2\theta\sqrt{Y^2}-bcy\cos D\cos\theta\sin^2\theta\pm bc\sin\theta\sin D(y\sin^2\theta+\cos\theta\sqrt{Y^2})}{c^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{bc\sin\theta\sqrt{Y^2}(\cos D\sin\theta\pm\sin D\cos\theta)=bcy\sin^2\theta(\cos D\cos\theta\mp\sin D\sin\theta)}{c^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{bc\sin\theta\sqrt{Y^2}\sin(D\pm\theta)-bcy\sin^2\theta\cos(D\pm\theta).}{c^2\sin^2\theta}$$

Il est facile maintenant de faire disparaître le radical $\sqrt{Y^2}$. L'on a :

$$bc\sin\theta\sin(D\pm\theta)\sqrt{Y^2}=bcy\sin^2\theta\cos(D\pm\theta)+c^2x\sin^2\theta.$$

Élevant au carré et réduisant, on arrive à l'équation :

$$b^2\sin^2\theta y^2+c^2\sin^2\theta x^2+2bc\sin^2\theta\cos(D\pm\theta)xy-b^2c^2\sin^2(D\pm\theta)=0.$$

Cette équation représente l'assemblage de deux ellipses, ce qui s'explique facilement, vu la double situation que peut prendre le sommet D pour chaque position de la base. Ces deux ellipses ont pour centre l'origine des coordonnées, dans l'une entre l'angle $D+\theta$, dans l'autre entre l'angle $D-\theta$; il s'agit de distinguer quelle est celle qui donne le lieu du sommet du triangle, lorsque ce sommet se trouve à droite de sa base, quelle est celle qui donne le lieu du sommet dans sa position inverse.

Nous allons pour cela placer le triangle dans une position particulière (*fig.* 19), de manière que BD s'appuyant sur l'axe des y, le sommet A reste toujours sur l'axe des x. Supposons D à droite de AB, on aura dans le triangle OAD :

$$OD : c :: \sin(D+\theta) : \sin\theta,$$

$$OD=\frac{c\sin(D+\theta)}{\sin\theta}.$$

Or si, dans l'équation

$$b^2\mathrm{in}^2\theta y^2+c^2\sin^2\theta x^2+2bc\sin^2\theta\cos(D+\theta)xy-b^2c^2\sin^2(D+\theta)=0,$$

on fait $x=0$, on a

$$y=\frac{c\sin(\mathrm{D}+\theta)}{\sin\theta}=\mathrm{OD}.$$

Donc cette équation représente le lieu du sommet D, lorsque ce point est situé à droite de AB; s'il est situé à gauche, l'équation est par conséquent (*),

$$b^2\overline{\sin}^2\theta y^2+c^2\overline{\sin}^2\theta x^2+2'c\overline{\sin}^2\theta\cos(\mathrm{D}-\theta)xy-b^2c^2\overline{\sin}^2\overline{\mathrm{D}-\theta}=0.$$

Calculons actuellement les axes $2z$, $2z'$ de chacune de ces ellipses. On arrivera facilement à ces valeurs en considérant chaque demi-axe comme représentant la plus grande et la plus petite distance du centre à un point de la courbe.

Leurs valeurs déjà données (**), pour une équation générale du second degré rapportée à des axes rectangulaires, sont

$$z^2=\frac{2p(\mathrm{A}+\mathrm{C})+k}{\delta^2},\qquad z'^2=\frac{2p(\mathrm{A}+\mathrm{C})-k}{\delta^2}.$$

Après avoir préalablement rapporté notre courbe à deux axes rectangulaires dont l'un serait l'axe des x primitifs et l'autre une perpendiculaire élevée au point O à cet axe, la nouvelle équation

$$\left(b^2+c^2\overline{\cos}^2\theta-2bc\cos\theta\cos(\mathrm{D}\pm\theta)\right)y^2+c^2\overline{\sin}^2\theta x^2+$$
$$+2\left(bc\cos\theta\cos(\mathrm{D}\pm\theta)-c^2\sin\theta\cos\theta\right)xy-b^2c^2\overline{\sin}^2(\mathrm{D}\pm\theta)=0,$$

nous donnera

$$2p=2b^2c^2\overline{\sin}^2(\mathrm{D}\pm\theta),$$
$$\mathrm{A}+\mathrm{C}=b^2+c^2-2bc\cos\theta\cos(\mathrm{D}\pm\theta),$$
$$k=2b^2c^2\overline{\sin}^2(\mathrm{D}\pm\theta)\sqrt{(b^2+c^2)^2+4b^2c^2\overline{\cos}^2\theta\,\overline{\cos}^2(\mathrm{D}\pm\theta)-}$$
$$\overline{-4(b^2+c^2)bc\cos\theta\cos\mathrm{D}\pm\theta},$$
$$\delta^2=4b^2c^2\overline{\sin}^2\theta\,\overline{\sin}^2(\mathrm{D}\mp\theta),$$

(*) On pourrait d'ailleurs le vérifier aussi comme précedemment.

(**) Voir le tome II des Annales, page 158.

d'où l'on déduit facilement :

$$z+z'=\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos(D\pm\theta+\theta)}.$$

Or soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle AOB, on a $R=\frac{a\alpha\beta}{4s}$; mais $4s=2\alpha\beta\sin\theta$. Donc

$$2R=\frac{a}{\sin\theta}.$$

Or si, dans l'expression de $z+z'$, nous prenons le signe — de θ, la proposition énoncée plus haut aura lieu, c'est-à-dire que le diamètre du cercle circonscrit au triangle AOB est égal à la demi-somme des axes, de l'ellipse représentée par la seconde équation.

Si l'on calcule $z-z'$, on trouve

$$z-z'=\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos(D\pm\theta-\theta)}.$$

Donc la différence des demi-axes de la première ellipse est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle AOB.

Note. Voici une autre solution d'après nos formules.

I. Lemme. x et y étant les coordonnées d'un point, t, v, t', v' des constantes; φ, un arc variable, si l'on a

$$x=t\sin\varphi+v\cos\varphi,\qquad y=t'\sin\varphi+v'\cos\varphi;$$

le lieu du point est une ellipse, ayant son centre à l'origine; éliminant φ, l'équation de cette ellipse est

$$y^2(t^2+v^2)-2xy\,(tt'+vv')+x^2\,(t'^2+v'^2)=(tv'-vt')^2,$$

et l'on a :

$$m=-4\,(tv'-vt')^2,\ L=4\,(tv'-vt')^4,\ k=k'=0,$$
$$l=4\,(t^2+v^2)\,(tv'-vt')^2,\ l'=4\,(t'^2+v'^2)\,(tv'-vt')^2,$$
$$n=-8(tt'+vv')(tv'-vt')^2,\ N=t^2+v^2+t'^2+v'^2+2(t't+vv')\cos\gamma,$$

(t. I, p. 489) où γ est l'angle des axes.

L'équation aux grandeurs des demi-axes principaux, devient (t. I, 495),

$$z^2-[t^2+v^2+t'^2+v'^2+2\,(tt'+vv')\cos\gamma]\,z+[tv'-t'v]^2\sin^2\gamma=0.$$

Ainsi le produit des demi-axes est $[tv'-vt']\sin\gamma$; et la somme des carrés est égal au coefficient de z.

Supposons $\gamma=\frac{1}{2}\pi$, α' et β' les demi-axes principaux, on aura :

$$(\alpha'-\beta')^2=(t\pm v')^2+(t'\mp v)^2,$$

dans la même supposition, le système des axes principaux est représenté par l'équation

$(tt'+vv')y^2+[t^2+v^2-t'^2-v'^2]xy-(tt'+vv')x^2=0$, (t. I, p. 496),

α et β étant les coordonnées rectangulaires des foyers, l'on obtient :

$\alpha^2=t^2+v^2-b^2$, $\beta^2=t'^2+v'^2-b^2$, b est le demi petit axe, (t. II, p. 430).

Corollaire. Si $tv'-vt'=0$, le produit des demi-axes est nul et la somme des carrés devient $t^2+v^2+t'^2+v'^2$; l'ellipse se réduit à une portion de droite, d'une longueur égale à la racine carrée de cette expression, et le point décrit deux fois cette droite par un mouvement de va-et-vient (t. I, p. 492).

II. *Théorème.* Le lieu du sommet d'un triangle donné dont la base est inscrite dans un angle fixe, est une ellipse ayant son centre au sommet de l'angle fixe; la somme algébrique des demi-axes est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle formé par la base et les deux côtés de l'angle fixe.

Démonstration. Soit (*fig.* 18) BOX, l'angle fixe donné, DBA le triangle donné; dont la base AB est inscrite dans l'angle fixe; il s'agit de trouver le lieu du point D. Prenons O pour origine; OA pour axe des x, et les axes rectangulaires; conservons les mêmes notations. D, A, B, O sont quatre angles donnés; faisons $O - A = I$, $a = a'\sin O$, $BAO = \varphi$, d'après ces relations, on trouve :

$$x = \sin\varphi\,(a'\cos O + c\sin A) + \cos\varphi\,(a'\sin O - c\cos A),$$
$$y = c\cos A\sin\varphi + c\sin A\cos\varphi,$$

x et y sont les coordonnées du point D.

Ainsi d'après le lemme, le lieu du point P est une ellipse; comparant ces expressions à celles du lemme, on a :

$$t = a'\cos O + c\sin A,\quad v = a'\sin O - c\cos A,\quad t' = c\cos A,$$
$$v' = c\sin A,\quad t^2 + v^2 = a'^2 - 2a'c\sin O + c^2,\quad t'^2 + v'^2 = c^2,$$
$$tt' + vv' = a'\cos O,\quad tv' - vt' = c^2 - a'c\sin(A - O),$$

α' et β' étant les demi-axes principaux, on a d'après le lemme $(\alpha' \pm \beta')^2 = a'^2$; or a' est le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABO; donc, etc.

Si $c > a'\sin(A - O)$, c'est $\alpha' - \beta'$ qui est constant; si $c < a'\sin(A - O)$, c'est $\alpha' + \beta'$ qui est constant; et si $c = a'\sin(A - O)$, l'ellipse devient une portion de droite.

Décrivons le cercle autour du triangle ABO; qu'il coupe AD en M, on aura angle $MOA = O - A$, $AM = a'\sin(O - A)$, $MD = c - a'\sin(O - A)$; ainsi la droite OM est fixe, et les deux droites AM, DM sont données de longueur; on voit donc que l'ellipse peut être décrite par une droite DNA donnée de longueur et dont le segment AM est inscrit dans l'angle fixe XOM, et lorsque M se confond avec D, l'ellipse se réduit à la droite fixe OD. Cette observation facilite la discussion : si $D + O > 2^q$, la différence des axes principaux est constante; si $D + O > 2^q$, c'est la somme qui est constante, et si $O + D = 2^q$, l'ellipse se confond avec son axe principal.

Elevons les perpendiculaires BI, AI aux droites OB, OA; le point I de rencontre est sur le cercle circonscrit à AOB; et $OI = a'$; DI, comme on sait, est normale à l'ellipse lieu du point D. Soit $DI = z$, $OD = f$; γ = angle du diamètre OD avec son conjugué; g = demi-diamètre conjugué à OD; on a $OI^2 = a'^2 = f^2 + z^2 - 2fz \sin\gamma = (\alpha' - \beta')^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha'\beta'$; or $\alpha'^2 + \beta'^2 = f^2 + g^2$, $2\alpha\beta - 2fg\sin\gamma$; donc $z^2 - 2fz\sin\gamma = g^2 - 2fg\sin\gamma$, d'où $z = g$, $z = 2f\sin\gamma - g$; la première valeur démontre le théorème de M. Abel Transon, (t. III, 596).

Le point I décrit un cercle dont le centre est O; la normale en D rencontre ce cercle en deux points I et I'; DI' est la seconde valeur de z.

Observation. Ce mode de génération ne s'applique qu'à l'ellipse et non aux coniques en général, comme tendrait à le faire croire l'énoncé d'une proposition qu'on lit dans les *Développements de Géométrie*, t. I, p. 31. Il existe une génération analogue pour l'ellipsoïde seulement, et non pour les surfaces du second degré en général. Tm.