NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OSSIAN BONNET

Essai sur la détermination approximative des racines imaginaires d'une équation algébrique ou transcendante

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 164-173

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__164_1>

ESSAI

Sur la détermination approximative des racines imaginaires d'une équation algébrique ou transcendante.

PAR M. OSSIAN BONNET,
répétiteur à l'École polytechnique.

I.

Soit une équation

$$(1) \qquad f(z) = 0,$$

dont le premier membre $f(z)$ représente une fonction réelle ou imaginaire, algébrique ou transcendante de la variable z. Posons :

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

$$f(x+y\sqrt{-1}) = f_1(x, y) + f_2(x, y)\sqrt{-1} = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1};$$

la détermination des racines imaginaires de l'équation (1), se ramènera à la résolution en nombres réels des deux équations simultanées :

$$\mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{Q} = 0,$$

ou ce qui revient au même en considérant x et y comme les coordonnées rectangles d'un point variable par rapport à deux axes déterminés, à la recherche des points communs aux deux courbes

$$(2) \qquad P=0, \quad Q=0.$$

Pour rappeler cette propriété et afin de simplifier le discours nous conviendrons d'appeler *points racines* de l'équation (1), les points d'intersection des deux courbes représentées par les équations (2).

Cela posé, supposons que par le théorème de M. Cauchy, ou par tout autre moyen, on soit parvenu à tracer un contour rectangulaire ACBDA comprenant un et un seul point racine M de l'équation (1) (*fig.* A), tous les points de ce contour seront en quelque sorte des positions approchées du point-racine M, et il ne restera plus qu'à déduire des premières positions approchées ainsi obtenues, d'autres positions de plus en plus approchées, de manière à avoir la position exacte si cela est possible, ou du moins une position aussi approchée qu'on le jugera nécessaire.

C'est ce calcul d'approximation que nous nous proposons de développer, nous emploierons la méthode de Newton qui est la plus simple et la plus expéditive ; seulement comme son application indéfiniment prolongée, ne conduirait pas toujours dans le cas actuel à des résultats exacts, nous la modifierons un peu ; il nous faudra en outre remplir plusieurs conditions analogues à celles que Fourier a données dans *l'analyse des équations déterminées* pour le cas des racines réelles (*).

(*) M. Cauchy à la fin de ses leçons sur le calcul différentiel s'est aussi occupé de la rectification de la méthode de Newton appliquée aux racines imaginaires ; mais les résultats auxquels il est parvenu sont en tout différents des nôtres.

II.

Commençons par énoncer les conditions dont il s'agit, en prouvant la possibilité de satisfaire à chacune d'elles.

« Pour pouvoir procéder avec certitude à l'approxima-
» tion, il suffit que l'une des deux courbes représentées par
» les équations $P=c$, $Q=c'$ où c et c' sont des constantes
» quelconques, ne présente dans l'intérieur du contour
» ABCDA (*fig.* A), ni points singuliers, ni en même temps
» une tangente parallèle à l'axe des x et une tangente pa-
» rallèle à l'axe des y. »

Il est clair que ces deux conditions peuvent toujours être remplies, à moins que le point racine M ne soit lui-même un point singulier des deux courbes $P=0$, $Q=0$.

Or je dis d'abord que l'on peut toujours supposer que le point racine M ne soit ni pour l'une ni pour l'autre des deux courbes $P=0$, $Q=0$, un point isolé, d'arrêt, multiple, de rebroussement. En effet, si le point M était un de ces points singuliers pour la courbe $P=0$ par exemple, on aurait en ce point :

$$\frac{dP}{dx}=0, \qquad \frac{dP}{dy}=0,$$

mais de l'égalité

$$f(x+y\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1}.$$

On tire aisément :

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx},$$

on aurait donc :

$$\frac{dP}{dx}=0, \qquad \frac{dQ}{dx}=0,$$

et alors le point M serait non-seulement point racine de l'équation (1) mais encore de l'équation dérivée

$$f'(z) = 0.$$

Ce que l'on peut toujours ne pas supposer, car dans ce cas le point racine M se détermine en résolvant une équation plus simple que l'équation (1), et dont le premier membre est le plus grand commun diviseur entre $f(z)$ et $f'(z)$, quand du moins $f(z)$ est algébrique.

On voit en même temps qu'en resserrant suffisamment le contour ABCDA, l'une des deux équations $\frac{dP}{dx}=0$, $\frac{dP}{dy}=0$, finira par ne plus avoir de solutions dans ce contour, alors la courbe $P=c$, et par conséquent la courbe $Q=c'$, ne présentera plus de tangentes parallèles à l'un des axes.

Je dis en second lieu que l'on peut supposer que le point M ne soit pas un point d'inflexion de l'une des courbes $P=0$, $Q=0$. En effet, si ce point était en même temps un point d'inflexion des deux courbes $P=0$, $Q=0$; on aurait pour ce point :

$$\frac{d^2P}{dx^2}\left(\frac{dP}{dy}\right)^2-2\frac{d^2P}{dxdy}\frac{dP}{dx}\frac{dP}{dy}+\frac{d^2P}{dy^2}\left(\frac{dP}{dx}\right)^2=0,$$

et

$$\frac{d^2Q}{dx^2}\left(\frac{dQ}{dy}\right)-2\frac{d^2Q}{dxdy}\frac{dQ}{dx}\frac{dQ}{dy}+\frac{d^2Q}{dy^2}\left(\frac{dQ}{dy}\right)^2=0;$$

mais de l'égalité

$$f\left(x+y\sqrt{-1}\right)=P+Q\sqrt{-1},$$

on déduit :

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy},\qquad \frac{dP}{dy}=-\frac{dQ}{dx},$$

$$\frac{d^2P}{dx^2}=\frac{d^2Q}{dxdy}=-\frac{d^2P}{dy^2},\qquad \frac{d^2P}{dxdy}=\frac{d^2Q}{dy^2}=-\frac{d^2Q}{dx^2};$$

les premières égalités reviennent donc à :

$$\frac{d^2P}{dx^2}\left\{\left(\frac{dP}{dy}\right)^2-\left(\frac{dP}{dx}\right)^2\right\}=2\frac{d^2P}{dxdy}\frac{dP}{dx}\frac{dP}{dy},$$

$$\frac{d^2P}{dxdy}\left\{\left(\frac{dP}{dy}\right)^2-\left(\frac{dP}{dx}\right)^2\right\}=-2\frac{d^2P}{dx^2}\frac{dP}{dx}\frac{dP}{dy},$$

d'où l'on tire :

$$\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2P}{dxdy}\right)^2 = 0,$$

si l'on n'a pas :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} = 0;$$

d'où enfin :

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{d^2P}{dxdy} = \frac{d^2Q}{dx^2} = 0;$$

ce qu'on peut ne pas supposer, car alors le point M est point-racine de l'équation

$$f''(z) = 0,$$

et peut être déterminé en résolvant une équation plus simple que l'équation (1), et dont on obtient le premier membre en cherchant le plus grand commun diviseur entre $f(z)$ et $f''(z)$.

Rapprochant ce résultat de celui que nous avons établi plus haut, il est facile de conclure, comme nous voulions le démontrer, que l'on peut toujours supposer le contour assez petit pour que l'une des deux courbes $P = c$, $Q = c'$ n'ait dans l'intérieur de ce contour ni points singuliers, ni en même temps une tangente parallèle à l'axe des x, et une tangente parallèle à l'axe des y. Remarquons en outre que celle des deux courbes qui remplira ces conditions, et que nous supposerons toujours, dans ce qui va suivre, être $P = c$, ne présentera d'un certain côté de $Q = 0$ ni tangente parallèle à l'axe des x, ni tangente parallèle à l'axe des y; ce côté pouvant d'ailleurs être le même pour toutes les valeurs de c, si le contour est suffisamment petit. Cette dernière propriété résulte de ce que la courbe $P = c$ ne peut avoir deux tangentes parallèles à l'un des axes, sans avoir en même temps ou une tangente parallèle à l'autre axe, ou un point d'inflexion.

III.

Les conditions précédentes étant remplies, on peut procéder au calcul du point-racine. Il faut avoir soin seulement de partir d'une position approchée convenablement placée.

« Il suffit que le point m (*fig.* B), qui correspond à cette » position approchée, soit situé dans la concavité de la » courbe $P = 0$ et du côté de la courbe $Q = 0$, où les » courbes $P = c$ n'ont ni tangentes parallèles à l'axe des x, » ni tangentes parallèles à l'axe des y ; de plus, que ce point » m soit tel que toutes les courbes représentées par l'équa- » tion $P = cQ$, c étant une constante, depuis EMF qui » correspond à $c = 0$ jusqu'à mMH qui passe par le point m, » n'aient du côté de la courbe $Q = 0$, où se trouve le point » m, ni tangentes parallèles à l'axe des x, ni tangentes pa- » rallèles à l'axe des y, et que toutes les tangentes de ces » courbes qui correspondent à des points situés du même » côté, allant rencontrer la courbe $Q = 0$ avant leur sortie » du contour, fassent avec les courbes $P = c$, comprises dans » ce contour, des angles plus petits que la moitié du plus pe- » tit de ceux que forment, avec la courbe $P = 0$, celles des » courbes représentées par l'équation $P = cQ + c_1$, qui ont » des points d'inflexion dans le contour. »

Il est évident, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans aucun détail, que ces nouvelles conditions peuvent toujours être remplies, en prenant le contour suffisamment petit et le point m suffisamment près de $P = 0$, et d'un côté convenable de $Q = 0$.

IV.

Les courbes comprises dans l'équation $P = cQ$ et dans l'équation $P = cQ + c_1$, dont il a été question dans le paragraphe précédent, devant jouer, dans ce qui va suivre, un très-grand rôle, je ferai remarquer dès à présent deux de leurs propriétés. Les premières courbes passent par les points communs aux deux courbes $P = 0$, $Q = 0$; et les premières, comme les secondes, coupent sous des angles constants ayant pour tangentes $\pm c$ toutes les courbes $P = c'$ et sous des angles constants ayant pour tangentes $\pm \frac{1}{c}$ toutes les courbes $Q = c''$. Ces deux propriétés sont trop simples pour que nous nous arrêtions à les démontrer.

V.

Revenons maintenant au calcul du point-racine M.

Soient a, b les coordonnées de ce point, α, β celles du point m, qui représente la première position approchée, et $\rho \cos\theta$, $\rho \sin\theta$ les différences $a - \alpha$, $b - \beta$, de telle sorte que ρ soit la distance des deux points m et M, et θ l'angle positif que la droite mM fait avec la partie positive de l'axe des x;

Nous aurons d'abord :

$$f\left(\alpha + \rho\cos\theta, (\beta + \rho\sin\theta)\sqrt{-1}\right) = 0;$$

d'où, en posant :

$$f\left(\alpha + \rho\cos\theta, (\beta + \rho\sin\theta)\sqrt{-1}\right) = \varphi(\rho) + \psi(\rho)\sqrt{-1},$$

il vient :

$$\varphi(\rho) = 0, \quad \psi(\rho) = 0,$$

ou :

$$\varphi(0) + \varphi'(\varepsilon, \rho)\rho = 0, \quad \psi(0) + \psi'(\varepsilon_1, \rho)\rho = 0,$$

ε et ε_1 étant deux nombres indéterminés compris entre 0 et 1.

Posons, conformément à la méthode de Newton :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = 0,$$

les deux dernières équations deviendront :

$$\varphi(0) + \varphi'(0)\rho = 0, \quad \psi(0) + \psi'(0)\rho = 0,$$

d'où :

$$(3)\qquad \frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)}=\frac{\psi(0)}{\psi'(0)} \text{ et } \rho=-\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)} \text{ ou } \rho=-\frac{\psi(0)}{\psi'(0)},$$

équations qui font successivement connaître θ et ρ.

Examinons si ces valeurs conduisent à une position du point-racine plus approchée que celle d'où l'on est parti.

VI.

Mettons d'abord les équations (3) sous une autre forme.

Reprenons l'égalité :

$$f(x+y\sqrt{-1})=f_1(x,y)+f_2(x,y)\sqrt{-1}=\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1},$$

et posons en outre :

$$f(\alpha+\beta\sqrt{-1})=f_1(\alpha,\beta)+f_2(\alpha,\beta)\sqrt{-1}=\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1},$$

nous aurons évidemment :

$$\varphi(\rho)=f_1(\alpha+\rho\cos\theta,\ \beta+\rho\sin\theta),$$
$$\psi(\rho)=f_2(\alpha+\rho\cos\theta,\ \beta+\rho\sin\theta),$$

$$\varphi'(\rho)=\frac{d.f_1(\alpha+\rho\cos\theta,\beta+\rho\sin\theta)}{d.(\alpha+\rho\cos\theta)}\cos\theta+\frac{d.f_1(\alpha+\rho\cos\theta,\beta+\rho\sin\theta)}{d(\beta+\rho\sin\theta)}\sin\theta,$$

$$\psi'(\rho)=\frac{d.f_2(\alpha+\rho\cos\theta,\beta+\rho\sin\theta)}{d(\alpha+\rho\cos\theta)}\cos\theta+\frac{d.f_2(\alpha+\rho\cos\theta,\beta+\rho\sin\theta)}{d(\beta+\rho\sin\theta)}\sin\theta,$$

d'où

$$\varphi'(0)=\frac{d\mathrm{A}}{d\alpha}\cos\theta+\frac{d\mathrm{A}}{d\beta}\sin\theta,\quad \psi'(0)=\frac{d\mathrm{B}}{d\alpha}\cos\theta+\frac{d\mathrm{B}}{d\beta}\sin\theta;$$

les équations (3) reviennent donc à

$$(4)\qquad \frac{\mathrm{A}}{\frac{d\mathrm{A}}{d\alpha}\cos\theta+\frac{d\mathrm{A}}{d\beta}\sin\theta}=\frac{\mathrm{B}}{\frac{d\mathrm{B}}{d\alpha}\cos\theta+\frac{d\mathrm{B}}{d\beta}\sin\theta},$$

$$(5)\qquad \rho=\frac{-\mathrm{A}}{\frac{d\mathrm{A}}{d\alpha}\cos\theta+\frac{d\mathrm{A}}{d\beta}\sin\theta} \text{ ou } \rho=\frac{-\mathrm{B}}{\frac{d\mathrm{B}}{d\alpha}\cos\theta+\frac{d\mathrm{B}}{d\beta}\sin\theta}.$$

VII.

Nous tirons maintenant de l'équation (4) :

$$\left(A\frac{dB}{d\alpha}-B\frac{dA}{d\alpha}\right)\cos\theta+\left(A\frac{dB}{d\beta}-B\frac{dA}{d\beta}\right)\sin\theta=0,$$

d'où

$$\frac{d.\frac{A}{B}}{d\alpha}\cos\theta+\frac{d.\frac{A}{B}}{d\beta}\sin\theta=0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta=-\frac{\dfrac{d.\frac{A}{B}}{d\alpha}}{\dfrac{d.\frac{A}{B}}{d\beta}}.$$

Telle est la valeur de θ ; on peut donner à cette valeur une interprétation géométrique assez remarquable. « Elle est » égale à l'un des deux angles positifs que fait avec la partie » positive de l'axe des x, la tangente menée par le point (α,β), » à la courbe dont l'équation est

» $$\frac{P}{Q}=\frac{A}{B}\quad \text{ou}\quad P=\frac{A}{B}Q.$$ »

Il est clair d'ailleurs que de ces deux angles positifs, on doit prendre celui que fait avec la partie positive de l'axe des x, la portion de la tangente dont il s'agit, qui, parcourue en partant du point m, tend à s'approcher du point M ; nous avertissons une fois pour toutes, que dans ce qui va suivre nous représenterons toujours ce dernier angle par θ.

VIII.

Occupons-nous en second lieu de la valeur approchée de ρ

$$\rho = \frac{-\mathrm{A}}{\frac{d\mathrm{A}}{d\alpha}\cos\theta + \frac{d\mathrm{A}}{d\beta}\sin\theta} \quad (*).$$

Nous devrions d'abord nous demander si cette valeur est positive comme la valeur exacte; mais pour ne pas entraver notre marche, nous supposerons qu'il en soit ainsi, nous reviendrons dans la suite sur ce point important.

Appelons φ_1 celui des deux angles positifs que fait avec la partie positive de l'axe des x, la tangente au point $x=\alpha$, $y=\beta$ de la courbe $\mathrm{P}=\mathrm{A}$, pour lequel $\sin(\theta-\varphi_1)$ est positif; la valeur de ρ écrite ci-dessus deviendra

$$\rho = \frac{\pm\mathrm{A}}{\sqrt{\left(\frac{d\mathrm{A}}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{A}}{d\beta}\right)^2}\sin(\theta-\varphi_1)},$$

le signe $\pm$ étant celui de A, afin que le second membre soit positif. Pour savoir maintenant si le point qui correspond à la seconde position approchée est, comme celui d'où l'on est parti, situé dans la concavité de la courbe $\mathrm{P}=0$, voyons si la valeur approchée de ρ est plus petite que la partie mm_1, (*fig.* B) de la tangente à la courbe $\mathrm{P}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\mathrm{Q}$, menée par le point $x=\alpha$, $y=\beta$, et comprise entre ce point et la courbe $\mathrm{P}=0$.

(*La suite prochainement.*)