NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. CHARPENTIER

De la lemniscate hyperbolique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 142-146

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__142_0>

DE LA LEMNISCATE HYPERBOLIQUE.

PAR M. H. CHARPENTIER,
professeur de mathématiques spéciales au collége d'Alençon.

—

1. Cette courbe est *le lieu des projections du centre de l'hyperbole équilatère sur les tangentes à cette courbe.*

Soient :

$$y^2 - x^2 = -a^2 \tag{1}$$

l'équation de l'hyperbole équilatère ;

$$yy' - xx' = -a^2 \tag{2}$$

l'équation de la tangente à cette hyperbole au point n' dont les coordonnées sont x' et y'.

L'équation de la perpendicnlaire abaissée du centre sur la tangente sera :

$$y = -\frac{y'}{x'}x, \tag{3}$$

et comme le point n' est sur la courbe, on aura encore cette relation :

$$y'^2 - x'^2 = -a^2. \tag{4}$$

L'élimination de x' et de y' entre les équations (2), (3), (4) conduira à l'équation de la courbe.

En combinant les équations (2) et (3), on tire les valeurs :

$$(5) \qquad x' = \frac{a^2x}{y^2+x^2}, \qquad (6) \quad y' = -\frac{a^2y}{y^2+x^2};$$

et les substituant dans l'équation (4), on a l'équation de la lemniscate,

$$(y^2 + x^2)^2 = a^2(x^2 - y^2). \tag{7}$$

La courbe passe par l'origine, qui est son centre; l'axe des x et celui des y sont des diamètres de la courbe, et en égalant à zéro les termes de cette équation qui sont au second degré, on a les équations des tangentes à l'origine :

$$y = x, \qquad y = -x.$$

L'origine est un point double, et ces tangentes, qui sont les bissectrices des angles des axes, sont les asymptotes de l'hyperbole équilatère.

2. Si l'on élève au carré les équations (5) et (6) et les ajoutant, on a :

$$x'^2 + y'^2 = \frac{a^4}{x^2+y^2} \quad \text{ou} \quad Om \times On' = a^2. \quad \text{(Fig. 6)},$$

ce qui prouve que *le demi-axe de l'hyperbole est moyen proportionnel entre la distance du centre au point générateur de la lemniscate hyperbolique et la distance du centre au contact correspondant de l'hyperbole.*

3. Si l'on rapporte la lemniscate à des coordonnées polaires, son équation sera :

$$\rho = \pm a \sqrt{\cos 2\omega}.$$

Chaque valeur de ω variant depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \frac{\pi}{4}$, donnera pour ρ des valeurs égales et de signes contraires qui détermineront les points de la courbe situés sur le rayon vecteur et sur son prolongement. Ce rayon vecteur variera depuis $\rho = a$ jusqu'à $\rho = 0$.

On obtiendra ainsi la portion de la courbe AmO et la portion $A'm'O$ (*fig.* 6).

Depuis $\omega = \frac{\pi}{4}$ jusqu'à $\omega = \frac{3\pi}{4}$, les valeurs de ρ sont imaginaires. Depuis $\omega = \frac{3\pi}{4}$ jusqu'à $\omega = \pi$, les valeurs de ρ varient depuis $\rho = 0$ jusqu'à $\rho = a$; ce qui donne la portion de la courbe $Om''A'$ et la portion $Om'''A$.

Pour trouver le point maximum de la courbe situé dans la portion AmO de la courbe, en désignant par y l'ordonnée de ce point, on a :

$$y^2 = \frac{\rho^2(a^2 - \rho^2)}{2a^2}.$$

La dérivée de y par rapport à ρ est donnée par la quantité

$$\frac{a^2 - 2\rho^2}{a\sqrt{2}\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Le rayon vecteur correspondant au point maximum sera :

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

d'où l'on a :

$$y = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \qquad x = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Ce point de la lemniscate correspond au point de contact de l'hyperbole dont les coordonnées sont :

$$y = -\frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

4. En désignant par ρ et ρ' les rayons vecteurs de la lemniscate et de l'hyperbole correspondants à la même valeur de ω, on a :

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\omega},$$

$$\rho' = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\omega}};$$

d'où

$$\rho\rho' = a^2.$$

Donc *le demi-axe de l'hyperbole est moyen proportionnel entre les rayons vecteurs de la lemniscate et de l'hyperbole faisant le même angle avec l'axe des* x.

5. On a vu que

$$Om \times On' = a^2.$$

En prolongeant le rayon om jusqu'à l'hyperbole en n, on a :

$$Om \times On = a^2\,;$$

donc $$On = On'.$$

Le point de contact n' et le point n sont deux points symétriques de la courbe par rapport à l'axe des x.

On peut conclure de là un moyen très-simple de construire la lemniscate hyperbolique, quand on aura préalablement tracé l'hyperbole équilatère.

Pour cela, on mènera un rayon vecteur On à l'hyperbole, on abaissera nn' perpendiculaire à l'axe des x et prolongée jusqu'à l'hyperbole, on joindra On'; de n et de n' on abaissera respectivement des perpendiculaires sur les rayons On' et On, et on déterminera deux points m' et m de la courbe.

6. Enfin, on peut construire la lemniscate hyperbolique sans construire préalablement l'hyperbole régulatrice.

En effet, on a :

$$\overline{Om}^2 = a^2 \cos 2\omega.$$

Donc, si l'on décrit une demi-circonférence sur le demi-axe de l'hyperbole comme diamètre, *le rayon vecteur de la lemniscate est moyen proportionnel entre le demi-axe et le rayon vecteur mené à cette demi-circonférence et faisant avec l'axe des* x *un angle double de celui que fait le rayon vecteur de la lemniscate avec le même axe.*

De là cette construction : on mènera un rayon vecteur Ok à la circonférence, on prendra $KI = AK$, on joindra OI, et on le rabattra en OP, on élèvera PG perpendiculaire à l'axe des x, on joindra OG et on le rabattra sur OK en Om, et le point m appartiendra à la lemniscate hyperbolique.

Note. Le nom de cette courbe dérive du mot grec λεμνίσκος qui signifie une bandelette nouée en *huit*. Fagnano a découvert les principales propriétés de cette ligne qui est d'une si grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques. Les démonstrations du géomètre italien sont géométriques (v. t. III, p. 509) ; la théorie analytique est due à Euler (M. de Pétersbourg, t. V, 1751-52) ; la courbe, quoique fermée, est carrable (t. I, p. 351). La lemniscate hyperbolique équilatère est aussi une cassinoïde, courbe bifocale. Mais la réciproque est fausse : toute cassinoïde n'est pas une lemniscate. Nous engageons les élèves à démontrer ces propositions.

Cette ligne est le cas particulier de l'enveloppe d'un cercle assujetti à avoir son centre sur une ligne plane donnée et à toucher une seconde ligne donnée dans le même plan. Cette seconde ligne fait évidemment partie de l'enveloppe et si elle se réduit à un point, ses coordonnées doivent satisfaire à l'équation générale de l'enveloppe. Tm.