Nouvelles annales de mathématiques

Prudot

Démonstration de l'équilibre des trois couteaux

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 137-138

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__137_1>

DÉMONSTRATION

De l'équilibre des trois couteaux.

PAR M. PRUDOT,
licencié ès sciences mathematiques.

On sait que trois couteaux, ou trois tiges rigides quelconques disposées ainsi que l'indique la figure 8, et reposant à leurs extrémités A, C, B et par des points d'appui sur une table horizontale, se tiennent en équilibre, si toutefois le frottement aux points de contact D, E, F est assez grand pour empêcher le glissement. Il s'agit de démontrer cet équilibre. Nous supposerons, dans cette démonstration, l'épaisseur des verges assez petite pour qu'on puisse les regarder comme étant dans un même plan.

Soit G le centre de gravité de DB, la force P qui le sollicite, pourra se décomposer en deux forces parallèles, l'une Q détruite par le point d'appui B, l'autre R passant par un point quelconque de l'axe de DB, prolongé si cela est nécessaire. Faisons $\mathrm{HD} = x$; R pourra se décomposer en deux forces parallèles S et T, qui se détermineront ainsi qu'il suit :

$$\mathrm{S}:\mathrm{R}::x+\mathrm{DF}:\mathrm{DF}, \quad \mathrm{T}:\mathrm{R}::x:\mathrm{DF},$$

d'où

$$\mathrm{S}=\frac{\mathrm{R}(x+\mathrm{DF})}{\mathrm{DF}}, \quad \mathrm{T}=\frac{\mathrm{R}\times x}{\mathrm{DF}},$$

S pourra se décomposer en deux forces parallèles V et U dont la dernière sera détruite par la résistance de la table, et on aura pour déterminer ces deux forces les proportions :

$$U : S :: DE : AE, \quad V : S :: AD : AE,$$

d'où

$$U = \frac{S \times DE}{AE}, \quad V = \frac{S \times AD}{AE} = \frac{R(x + DF) \times AD}{AE \times DF}.$$

Comme il ne reste plus que les deux forces V et T agissant en sens contraire sur une même droite rigide CF, il suffit pour qu'il y ait équilibre que leur résultante passe par le point d'appui C. C'est-à-dire qu'on doit avoir

$$T : V :: EC : FC \quad \text{ou} \quad \frac{R \times x}{DF} : \frac{R(x + DF) \times AD}{AE \times DF} :: EC : FC,$$

d'où successivement

$$x \times AE \times FC = x \times AD \times EC + DF \times AD \times EC,$$

$$x = \frac{DF \times AD \times EC}{AE \times FC - AD \times EC}.$$

Donc en prenant le point H qui est arbitraire à une distance du point D égale à cette valeur de x, on arrivera à deux forces T et V dont la résultante passera par le point d'appui D qui la détruira. On prouverait de même que les poids des autres verges, ou même les poids de corps placés sur elles se réduisent à des forces détruites par la résistance de la table; donc il y a équilibre.

Cette démonstration donne évidemment le moyen de calculer la charge des points d'appui et des points de contact.