BRETON (DE CHAMP)

Sur l'expression du côté du polygone semi-régulier circonscrit à la courbe qui a pour équation aux coordonnées rectangulaires $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 135-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__135_0>

SUR L'EXPRESSION

du côté du polygone semi-régulier circonscrit à la courbe qui a pour équation aux coordonnées rectangulaires

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}.$$

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

La courbe dont il s'agit est, comme on sait (II, 225), l'enveloppe d'une droite de longueur constante c inscrite dans un angle droit. Ce mode de génération, que nous choisissons parmi plusieurs autres également connus et remarquables, revient à considérer l'enveloppée comme joignant continuellement les projections sur les axes d'un point mobile sur la circonférence de rayon c. Supposons que ce point occupe sur la circonférence une suite de positions séparées entre elles par des arcs égaux, chaque position de l'enveloppée fera avec la position voisine un angle égal à celui compris entre deux positions consécutives du rayon mené par le point mobile. Il suit de là qu'à un polygone régulier circonscrit au cercle, répond le polygone *semi-régulier* formé par l'enveloppée, le nom de semi-régulier indiquant l'égalité des angles. Il est vrai qu'auprès des points de rebroussement de la courbe, la loi ci-dessus paraît rompue, mais elle ne l'est réellement pas, en ce sens que les angles de l'enveloppée avec une ligne fixe, l'axe des y par exemple, forment une progression arithmétique non interrompue.

Cette possibilité de circonscrire à la courbe un polygone semi-régulier toutes les fois que le polygone régulier correspondant peut être circonscrit au cercle avec la règle et le compas, est déjà remarquable. Mais notre intention est ici surtout de signaler l'expression trigonométrique du côté d'un polygone semi-régulier, expression dont la simplicité constitue une nouvelle propriété curieuse de cette même courbe, qui en présente tant d'autres.

Soit θ_0 le premier terme de la progression arithmétique des angles, θ la raison, et i un nombre entier quelconque, trois positions consécutives de l'enveloppée seront représentées par les équations :

$$\frac{x}{\sin[(i-1)\theta+\theta_0]}+\frac{y}{\cos[(i-1)\theta+\theta_0]}=1 \;\ldots\ldots\; (i-1),$$

$$\frac{x}{\sin[i\theta+\theta_0]}+\frac{y}{\cos[i\theta+\theta_0]}=1 \;\ldots\ldots\; (i),$$

$$\frac{x}{\sin[(i+1)\theta+\theta_0]}+\frac{y}{\cos[(i+1)\theta+\theta_0]}=1 \;\ldots\ldots\; (i+1).$$

Si l'on cherche les coordonnées des points d'intersection, et que l'on prenne leurs différences, il vient, toutes réductions faites, pour les valeurs des projections du côté (1) sur les deux axes :

$$\frac{c\sin\frac{3}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\sin 2(i\theta+\theta_0)\sin(i\theta+\theta_0),$$

$$\frac{c\sin\frac{3}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\sin 2(i\theta+\theta_0)\cos(i\theta+\theta_0);$$

d'où il suit que ce même côté a pour longueur :

$$\frac{c\sin\frac{3}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\sin 2(i\theta+\theta_0).$$

C'est ce que nous voulions faire voir. Ces résultats sont d'une frappante simplicité et peuvent se représenter géométriquement. Nous laissons au lecteur le soin d'en faire la recherche, mais nous croyons être utile aux élèves en leur indiquant comme bon exercice de trigonométrie le rétablissement des calculs qui nous ont servi à obtenir les formules ci-dessus, et que nous avons supprimés.