Nouvelles annales de mathématiques

A. Deladeréere

Question sur le quadrilatère inscrit

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 131-134

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__131_0>

QUESTION SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIT.

PAR M. A. DELADEREERE,
Professeur licencié ès sciences physiques et mathématiques.

—

La question traitée n° 47 de la géométrie analytique de M. Lefébure de Fourcy (*), donne lieu à l'équation du troisième degré $x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$, qui admet une racine positive répondant à la question, et deux autres racines négatives que je me propose d'interpréter.

Pour cela je remarque que dans le quadrilatère, on a :

$$(1) \qquad yz=ac+bx,$$

et que les triangles rectangles ACD, ABD, donnent (*fig.* 9) :

$$(2) \qquad y^2=x^2-a^2,$$

$$(3) \qquad z^2=x^2-c^2.$$

Or, pour éliminer y et z entre ces deux équations, on élève (1) au carré, et on égale au produit de (2) par (3), ce qui donne pour l'équation en x :

$$(4) \qquad (x^2-a^2)(x^2-c^2)=(ac+bx)^2,$$

qui simplifiée donne l'équation :

$$(5) \qquad x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0;$$

laquelle admet une racine de signe contraire à son dernier terme, et par suite positive, laquelle est comprise entre la plus grande des valeurs de a, b et c, et la somme $a+b+c$. Car en substituant c pour x par exemple on a pour résultat :

$$c^3-(a^2+b^2+c^2)c-2abc=-a(b+c)^2,$$

(*) C'est une question résolue par Newton, *Art. univ.*, I, 118 ; traduction de Beaudeux. D.

résultat négatif, et en substituant $a+b+c$ on a :

$$(a+b+c)^3 - (a^2+b^2+c^2)(a+b+c) - 2abc = (a+b+c)$$
$$[(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)] - 2abc = 2(a+b+c)(ab+bc+ca) -$$
$$- 2abc = 2[(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc] =$$
$$= 2[(a+b+c)(ab+ca) + bc(b+c)],$$

résultat positif, et on voit en effet que x étant un diamètre doit être plus grand que chacune des cordes a, b et c, et plus petit que $(a+b+c)$, d'après la définition de la ligne droite.

Il n'y a d'ailleurs pas d'autres racines positives, puisque l'équation ne présente qu'une variation.

Les autres racines sont réelles, car la condition de réalité des racines de l'équation du troisième degré, privé de deuxième terme $4p^3+27q^2>0$, est remplie, vu que cette condition exige qu'on ait :

$$-4(a^2+b^2+c^2)^3 + 27\times 4a^2b^2c^2 < 0 \text{ ou } \frac{a^2+b^2+c^2}{3} > \sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

condition qui se trouve remplie, car en posant $x_1^2+y_1^2+z_1^2=p^2$, $x_1^2y_1^2z_1^2$ sera maximum lorsque l'on aura $x_1^2=y_1^2=z_1^2$, d'où $3x_1^2=p^2$, $x_1^2=\frac{p^2}{3}$, et dans ce cas $x_1^2y_1^2z_1^2=\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3^3}$, et puisque c'est un maximum, on a :

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3^3} > a^2b^2c^2, \text{ d'où } \frac{a^2+b^2+c^2}{3} > \sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

ce qui entraîne la condition de réalité de toutes les racines. Il résulte de là que l'équation admet deux racines négatives.

Pour interpréter ces dernières, je change x en $-x$, dans toutes les équations, ce qui donne :

(6) $\qquad yz = (ac - bx)$,

(7) $\qquad y^2 = (x^2 - a^2)$,

(8) $\qquad z^2 = (x^2 - c^2)$,

(9) $\qquad (x^2 - a^2)(x^2 - c^2) = (ac - bx)^2$,

(10) $\qquad x^3 - (a^2+b^2+c^2)x + 2abc = 0$.

Or, en examinant (6), on trouve qu'elle revient à $ac = yz + bx$, ce qui revient à considérer a et c comme les diagonales d'un quadrilatère inscrit dont a, y, z, b et x, seraient les côtés, et a et b les diagonales (7) et (8) indiquant que x est le diamètre du cercle, et c'est en effet ce à quoi l'on arrive en cherchant à résoudre cette question.

Si nous considérons l'équation (10), nous voyons qu'elle admet deux racines positives; la première est comprise entre la plus grande des trois valeurs a, b et c, et $a+b+c$, qui donnent des résultats de signe contraire, car pour $x=a$ par exemple elle devient :

$$a^3-(a^2+b^2+c^2)\,a+2abc = -(b^2+c^2)a+2abc = -a(b-c)^2,$$

résultat negatif, et pour $x = a+b+c$, elle devient :

$$\begin{aligned}&(a+b+c)^3-(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+2abc = \\ &= (a+b+c)\left[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\right]+2abc = \\ &= 2\left[(a+b+c)(ab+bc+ca)+abc\right],\end{aligned}$$

résultat positif.

On voit d'ailleurs que cette racine convient à la question, car l'inspection de la figure montre qu'on a x plus grand que toute corde, puisque c'est un diamètre, et plus petit que $a+b+c$, d'après la définition de la ligne droite.

La deuxième racine positive est comprise entre 0 et la plus petite des valeurs des trois lignes, a, b et c, car pour $x = 0$, le premier membre devient $+2abc$, et pour x egale a une des valeurs de a, b ou c, nous avons vu que le premier membre se réduisait à $-a(b-c)^2$, résultat négatif.

La solution positive de l'équation (5), et la première des solutions positives de l'équation (10), satisfont à cette question.

Trouver le diamètre d'un cercle connaissant la longueur d'une corde, la distance d'une de ses extrémités à l'une des extrémités d'un diamètre, et la distance de son autre extrémité à l'autre extrémité du même diamètre.

Mais la troisième solution ne convient pas à cette question, car si elle satisfait à l'équation (10), elle ne satisfait aux équations (7) et (8), que pour des valeurs imaginaires de y et z, puisque $x < a$ et $x < c$.

Ainsi on voit qu'une racine positive d'une équation, n'indique pas toujours la possibilité du problème qui a donné naissance à cette équation.

La deuxième solution se présente telle que l'indique la figure (10), lorsque $a > b$ et $c > b$; mais si $a > b > c$, elle se présente sous la forme de la figure (11).

La troisième solution devient réelle, si l'on remarque que l'équation (10) a été obtenue en éliminant y^2z^2 entre les équations $y^2z^2 = (x^2 - a^2)(x^2 - c^2)$ et $y^2z^3 = (ac - bx)^2$. Équation à laquelle on arriverait en éliminant y^2z^2 entre les équations

$$yz = (ac - bx)^2, \quad y^2 = (a + x)(c - x) \text{ et } z^2 = (c + x)(a - x),$$

résultat que l'on pourrait interpréter géométriquement.

Note. La condition de réalité des racines de l'équation (5),

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} > \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \text{ revient à } \left(\frac{\sqrt[3]{a^2 + b^2 + c^2}}{3}\right)^3 > abc.$$

Or abc est le volume d'un parallélipipède rectangle dont les trois arêtes sont a, b et c, et $\frac{\sqrt[2]{a^2 + b^2 + c^2}}{3}$ représente le rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral dont le côté serait la diagonale du parallélipipède, représentée par $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ce qui montre que le cube du rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral dont le côté est la diagonale d'un parallélipipède rectangle, est plus grande que ce parallélipipède.