NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Note sur les fractions continues périodiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 126-130

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__126_1>

NOTE

sur les fractions continues périodiques ;

PAR E. CATALAN.

Pour établir cette proposition : *toute fraction continue périodique est égale à l'une des racines d'une équation du second degré*, la plupart des auteurs emploient la démonstration suivante, que je reproduis textuellement d'après l'un d'eux :

« Soient a, b, c, ... les premiers quotients, qui forment la partie non périodique ; et soient p, q, les quotients suivants, qui reviennent périodiquement. Posons :

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}} \qquad y = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}$$

(*) En effet si b était $< a$ on insérerait les moyens entre b et a, ce qui conduirait aux mêmes résultats, et l'on aurait alors $q + \alpha > 1$.

Il est clair que dans ces deux expressions, on pourra remplacer par y la suite $p+$etc. · de sorte qu'on aura

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cdots + \cfrac{1}{y}}, \qquad y = p + \cfrac{1}{q + \cdots + \cfrac{1}{y}}. \text{»}$$

Dans cette démonstration, le raisonnement suivant, dont j'ai déjà cité des exemples (III, 571), et qui paraît peu *clair*, est évidemment sous-entendu : *le nombre des périodes étant infini, il est permis d'en prendre une de plus ou une de moins; donc*, etc.

En cherchant une démonstration rigoureuse de la proposition dont il s'agit, je suis arrivé à plusieurs théorèmes qui n'avaient pas, je pense, été remarqués.

1. Soit, pour fixer les idées, la fraction continue périodique *simple :*

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}}}$$

Représentons par $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{n-1}, y_n$ les valeurs que l'on obtient, quand on limite cette fraction à la première période, ou à la seconde, ou à la troisième, etc. Soient aussi $\frac{M}{M'}, \frac{N}{N'}, \frac{P}{P'}$ les réduites répondant aux termes c, d, e de la première période, de manière que

$$y_1 = \frac{P}{P'}, \quad P = Ne + M, \quad P' = N'e + M', \quad y_1 = \frac{Ne + M}{N'e + M'}.$$

Si, dans cette valeur de y_1, nous remplaçons e par $e + \frac{1}{y_1}$, nous obtiendrons y_2 : donc

$$y_2 = \frac{N\left(e+\frac{1}{y_1}\right)+M}{N'\left(e+\frac{1}{y_1}\right)+M'} = \frac{Py_1+N}{P'y_1+N'}.$$

De même, si dans y_1 nous remplacions e par $e+\frac{1}{y_2}$, nous obtiendrions y_3, etc. Donc, en général,

$$y_n = \frac{Py_{n-1}+N}{P'y_{n-1}+N'}. \qquad (1)$$

2. Soit $\frac{Q}{Q'}$ la fraction irréductible équivalente à y_{n-1}; nous aurons :

$$y_n = \frac{PQ+NQ'}{P'Q+N'Q'}; \qquad (2)$$

et je dis que la fraction contenue dans le second membre sera irréductible.

Soient R, R' les deux termes de cette fraction, savoir :

$$R = PQ+NQ', \quad R' = P'Q+N'Q'. \qquad (3)$$

Entre ces équations, éliminons successivement Q et Q'; nous trouverons :

$$RP'-R'P=(NP'-N'P)Q', \quad RN'-R'N=-(NP'-N'P)Q.$$

Or $\frac{N}{N'}$ et $\frac{P}{P'}$ sont deux réduites consécutives ; donc $NP'-N'P=\pm 1$ (*). Par suite,

$$RP'-R'P=\pm Q', \quad RN'-R'N=\mp Q. \qquad (4)$$

Ces équations prouvent que tout facteur commun à R et R devrait diviser Q et Q'. Si donc, comme nous l'avons supposé, la fraction $\frac{Q}{Q'}$ est irréductible, $\frac{R}{R'}$ sera pareillement irréductible.

(*) Le signe + répond au cas où le nombre des termes de la période est impair.

D'ailleurs, la fraction $\frac{P}{P'}$ qui donne la valeur de la première période, est une réduite; donc *toutes les fractions obtenues successivement par l'application de la formule* (1) *sont des réduites.*

3. Soient, comme précédemment,

$$y_{n-1}=\frac{Q}{Q'},\ y_n=\frac{R}{R'};\ \text{d'où}\ y_n-y_{n-1}=\frac{RQ'-R'Q}{R'Q'}.$$

Soit ensuite $y_{n+1}=\frac{S}{S'}$; d'où $y_{n+1}-y_n=\frac{SR'-S'R}{S'R'}$.

Pour comparer ces deux différences, j'observe que, d'après les équations (3),

$$S=PR+NR',\qquad S'=P'R+N'R';$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}SR'-S'R&=(PR+NR')R'-(P'R+N'R')R\\&=R(PR'-P'R)+R'(NR'-N'R);\end{aligned}$$

ou
$$SR'-S'R=\mp(RQ'-R'Q),$$

à cause des équations (4).

Nous obtenons ainsi $y_{n+1}-y_n=\mp\frac{RQ'-R'Q}{S'R'}$.

En comparant cette valeur et celle de y_n-y_{n-1}, on voit qu'elles ont même numérateur; donc *le numérateur de la différence entre deux réduites consécutives* y_{n-1}, y_n, *est constant.*

4. Si nous retranchons y_1 de y_2, nous obtenons, d'après la formule (2):

$$y_2-y_1=\frac{P^2+NP'}{P'(P'+N')}-\frac{P}{P'}=\frac{P'(NP'-N'P)}{P'^2(P+N')}=\pm\frac{P'}{P'^2(P+N')}.$$

Par suite, la valeur constante du numérateur de la différence entre y_{n-1} et y_n est P', et nous avons

$$y_n - y_{n-1} = \pm \frac{P'}{R'Q'}. \text{ (*)} \qquad (5)$$

5. La première des équations (4) fait voir que si Q' est divisible par P', R' sera pareillement divisible par ce facteur. Or le dénominateur de y_2 est $P'(P'+N)$: donc *les dénominateurs de toutes les réduites sont divisibles par* P' ; et conséquemment

$$y_n - y_{n-1} = \pm \frac{1}{R'Q''}, \qquad (6)$$

en posant $Q' = P'Q''$.

6. Les équations (5) et (6) prouvent que la différence entre y_n et y_{n-1} diminue indéfiniment, à mesure que n augmente. Nous pourrons donc écrire :

$$y_n = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{y_n + \delta}}}}},$$

δ étant une quantité qui a pour limite zéro. Et si nous nommons y la *valeur* de la fraction continue, ou la limite de y_n, nous aurons :

$$y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{y}}}}}.$$

(*) Dans l'application de cette formule, on devra prendre le signe —, si le nombre des termes de la période est *pair*. Et si ce nombre est *impair*, on prendra le signe + ou le signe —, selon que n sera *pair* ou *impair*.