

GUILMIN

## Note sur la trigonométrie

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 4  
(1845), p. 122-124

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1845\\_1\\_4\\_\\_122\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__122_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## NOTE SUR LA TRIGONOMÉTRIE.

**PAR M. GUILMIN,**

Ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques.

(Fin, voir page 55.)

On sait que l'équation aux cosinus, dont il vient d'être question, s'obtient en cherchant préalablement  $\cos na$  en fonction de  $\cos a$ , puis changeant  $a$  en  $\frac{a}{n}$ .

Sachant que  $\cos na$  est une fonction entière de  $\cos a$ , on propose de démontrer à priori que cette fonction ne renferme que des puissances paires de  $\cos a$ , si  $n$  est pair, et seulement des puissances impaires de  $\cos a$ , si  $n$  est impair.

1<sup>er</sup> cas,  $n$  pair.

Quand on change  $a$  en  $a + \pi$ ,  $\cos na$  qui devient  $\cos(na + n\pi)$  ne changeant pas plus de signe que de valeur absolue, il doit en être de même de chaque terme de la fonction qui le représente; or chaque facteur  $\cos a$  devenu  $\cos(a + \pi)$  change de signe; le nombre de ces facteurs dans chaque terme doit donc être pair. Ce qu'il fallait prouver.

2<sup>o</sup> cas,  $n$  impair.

Dans ce cas,  $\cos na$  change seulement de signe en devenant  $\cos(na + n\pi)$ ; il doit en être de même de chaque terme de la fonction; donc le nombre des facteurs  $\cos a$  doit être impair dans ce terme.

Il résulte de là que dans l'équation de degré  $n$  qui donne  $\cos \frac{a}{n}$  en fonction de  $\cos a$ , tous les termes sont de degré pair ou de degré impair, suivant que  $n$  est pair ou impair. Ceci

comprend comme cas particulier le principe dont l'énoncé commence cet article.

Quand on cherche  $\cos na$  en fonction de  $\cos a$  et de  $\sin a$ , on trouve une fonction entière dont chaque terme contient toujours une puissance paire de  $\sin a$  avec une puissance paire de  $\cos a$ , si  $n$  est pair, et une puissance impaire de  $\cos a$ , si  $n$  est impair. Expliquer cela à priori.

Quel que soit  $n$ , si on change  $a$  en  $-a$ ,  $\cos na$  et  $\cos a$  ne changent pas, tandis que  $\sin a$  change de signe. Donc, pour que la fonction qui représente  $\cos na$  ne change pas, il est nécessaire que chaque terme contienne une puissance paire de  $\sin a$ .

Supposons maintenant qu'on change  $a$  en  $a + \pi$ ; distinguons les cas de  $n$  pair et de  $n$  impair. Dans le premier cas,  $\cos(na + n\pi)$  ne changeant pas de signe, chaque terme de la fonction doit conserver le sien;  $\sin a$  et  $\cos a$  changent de signes en devenant  $\sin(a + \pi)$ ,  $\cos(a + \pi)$ ;  $\sin a$  ayant un exposant pair dans notre terme, sa puissance conserve le même signe qu'auparavant. Donc la puissance de  $\cos a$  doit être paire.

Si  $n$  est impair,  $\cos a$  changeant de signe, chaque terme de la fonction doit en changer; comme la puissance de  $\sin a$  est toujours paire, celle de  $\cos a$  dans ce terme doit être impaire.

On prouvera de la même manière que si on peut trouver pour  $\sin na$  une fonction entière de  $\sin a$  et  $\cos a$ , chaque terme de cette fonction devra comprendre dans tous les cas une puissance impaire de  $\sin a$  avec une puissance paire du cosinus, si  $n$  est impair; et une puissance impaire du même, si  $n$  est pair. On se fonde d'abord sur ce que  $\sin na$  et  $\sin a$  changent de signe avec  $a$ , tandis que  $\cos a$  n'en change pas, ce qui prouve que chaque terme de la fonction qui représente  $\sin na$  doit renfermer, quel que soit  $n$ , une puissance impaire

de  $\sin a$ . Puis on observe que si on change  $a$  en  $a + \pi$ ,  $\sin a$  et  $\cos a$  changent de signes, tandis que  $\sin na$  en change seulement quand  $n$  est impair.

De cette dernière remarque il résulte que la substitution de  $1 - \sin^2 a$ , au lieu de  $\cos^2 a$ , donnera de suite, quand  $n$  sera impair pour  $\sin na$ , une fonction rationnelle de  $\sin a$  dont le degré ne sera pas plus élevé que le degré de la première fonction par rapport à  $\sin a$  et  $\cos a$ .

Dans le cas de  $n$  pair, on pourra mettre préalablement  $\cos a$  en facteur d'une fonction qui sera paire par rapport à  $\cos a$ . Après l'élimination des cosinus, il faudra élever au carré; ce qui donne une fonction d'un degré double en  $\sin a$ .