RISPAL

Quadrature de la logarithmique $y = a^x$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 117-120

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__117_1>

QUADRATURE DE LA LOGARITHMIQUE $y = a^x$.

PAR M. RISPAL,
élève de l'École normale.

—

Nous supposons a positif et > 1. On sait que la courbe se compose d'une branche MAN (*fig.* 12) qui coupe l'axe des y au point A pour lequel $AO = 1$, et qui a pour asymptote la partie négative de l'axe des x.

Supposons que nous voulions déterminer l'aire comprise entre OA et une ordonnée quelconque PQ.

Je partage l'abscisse QO en n parties égales à h; et par les points de division, j'élève des perpendiculaires, et je construis les rectangles représentés par la figure. Il est évident que plus h sera petit, plus la somme de ces rectangles s'approchera de la surface de la courbe, et qu'enfin à la limite pour $h = 0$, cette somme représentera exactement la surface cherchée. Or, les ordonnées successives étant

$$y_1, \ y_2, \ y_3 \ \ldots\ldots \ y_n,$$

on a $$y_1 = a^h,\ y_2 = a^{2h},\ \ldots\ldots\ y_n = a^{nh};$$

et la somme des aires est

$$S = h\,(a^h + a^{2h} + \ldots\ldots + a^{nh}),$$

ou $$S = \frac{h\,(a^{nh} - 1)}{a^h - 1}.$$

Or $$nh = x;$$

donc $$S = (a^x - 1)\,\frac{h}{a^h - 1};$$

et en désignant par Σ l'aire de la courbe même, on a :

$$\Sigma = (a^x - 1) \times \lim \frac{h}{a^h - 1} \text{ pour } h = 0.$$

D'après un développement connu, on a la série

$$a^h = 1 + \frac{kh}{1} + \frac{k^2h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

dans laquelle $$k = \log a,$$

d'où $$\frac{a^h - 1}{h} = k + \mathrm{P}h,$$

$$\frac{h}{a^h - 1} = \frac{1}{k + \mathrm{P}h};$$

et pour $h = 0$,

$$\lim \frac{h}{a^h - 1} = \frac{1}{k} = \frac{1}{l.a};$$

donc $$\Sigma = \frac{a^x - 1}{l.a} = \frac{y - 1}{l.a}.$$

Nous ferons remarquer ici que les logarithmes sont pris dans le système népérien, dont la base est

$$e = 2,\ 71828\ 18284\ \ldots..$$

Dans la partie négative de l'axe des x, y est < 1. On a donc :

$$\Sigma = \frac{1 - y}{l.a} = \frac{1 - \dfrac{1}{a^x}}{l.a}:$$

et à mesure que x croît, a^x croît aussi; pour $x = \infty$, on a $\Sigma = \frac{1}{l.\,a}$. Telle est la surface comprise entre la partie négative de l'asymptote et la courbe.

Cette formule $\Sigma = \frac{y-1}{l.\,a}$ peut recevoir une interprétation géométrique assez curieuse.

Dans cette courbe on sait que la sous-tangente est constante et égale à $\frac{1}{l.\,a}$. Posons donc $m = \frac{1}{l.\,a}$, et il vient :

$$\Sigma = (y-1)\,m.$$

Si donc on veut connaître la surface MAOP (*fig.* 12 *bis*), on mène en M la tangente; on construit sur la tangente et la sous-tangente le rectangle SP; par le point A on mène à l'axe des x la parallèle AR, et on a :

$$\text{rect. SR} = \text{surf. MAOP}.$$

En effet, $\quad \text{SR} = \text{MR} \,.\, \text{RT} = (\text{MP} - \text{AO})\,\text{PQ};$

mais $\quad \text{MP} = y, \quad \text{AO} = 1, \quad \text{PQ} = m;$

donc $\quad \text{SR} = (y-1)\,m.$

On aurait pu arriver directement à ces résultats par le calcul différentiel.

En effet, on a

$$ds = y\,dx,$$
$$y = a^x;$$

donc

$$ds = a^x dx,$$
$$\int ds = \frac{a^x}{l.\,a} + c.$$

Et comme pour $x = 0$, $s = 0$, on a :

$$\int_x^0 ds = \frac{a^x - 1}{l.\,a} = \frac{y-1}{l.\,a}.$$

De plus, la sous-tangente $m = \frac{y\,dx}{dy}$; mais

$$dy = a^x l.\,a\,dx,$$
$$= y\,l.\,a\,dx.$$

Donc $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{yl.a},$$

et par suite, $$m = \frac{1}{l.a}.$$

Donc $$\Sigma = (y - 1)\,m,$$

comme nous l'avions trouvé d'une manière élémentaire.