Nouvelles annales de mathématiques

O. Rodrigues

Démonstration d’un théorème connu sur les fractions continues périodiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 109-112
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__109_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L’accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l’accord avec les conditions générales d’utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d’une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DÉMONSTRATION

d'un théorème connu sur les fractions continues périodiques.

PAR M. O. RODRIGUES.

THÉORÈME.

Toute expression de la forme $\frac{M+\sqrt{N}}{P}$ se développe en fraction continue périodique.

Soit $\frac{M+\sqrt{N}}{P}=x=\lambda_0+\cfrac{1}{\lambda_1+\cfrac{1}{\lambda_2+\text{etc.}\,+\cfrac{1}{\lambda_s+\cfrac{1}{\lambda_{s+1}+\text{etc.}}}}}$

en désignant par Y_q une fraction continue dont tous les quotients incomplets seraient ceux de x, à partir de λ_q, on aura généralement les égalités suivantes :

$$(1)\ Y_q=\lambda_q+\cfrac{1}{\lambda_{q+1}+\text{etc.}}\qquad (2)\ x=\frac{a_{q-1}\,Y_q+a_{q-2}}{b_{q-1}\,Y_q+b_{q-2}},$$

$\frac{a_{q-1}}{b_{q-1}}$ et $\frac{a_{q-2}}{b_{q-2}}$ étant deux réduites consécutives de x, s'arrêtant à λ_{q-1}, λ_{q-2}, de sorte que

$$\frac{a_{q-2}}{b_{q-2}}=\lambda_0+\cfrac{1}{\lambda_1+\cfrac{1}{\lambda_2+\text{etc.}+\cfrac{1}{\lambda_{q-2}}}}\qquad \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}}=\lambda_0+\cfrac{1}{\lambda_1+\cfrac{1}{\lambda_2+\text{etc.}+\cfrac{1}{\lambda_{q-1}}}}$$

Comme les réduites de rang pair sont $< x$, la relation suivante aura lieu entre les termes des deux réduites consécutives :

$$a_{q-1}\,b_{q-2}-a_{q-2}\,b_{q-1}=(-1)^q.$$

De l'égalité (2) on déduit, en remplaçant x par sa valeur,

$$Y_q=\frac{b_{q-2}\sqrt{N}+Mb_{q-2}-Pa_{q-2}}{Pa_{q-1}-Mb_{q-1}-b_{q-1}\sqrt{N}};$$

d'où, en faisant disparaître le radical du dénominateur,

$$Y_q=\frac{P\sqrt{N}\left(a_{q-1}b_{q-2}-a_{q-2}b_{q-1}\right)+Nb_{q-1}b_{q-2}-\left(Pa_{q-1}-Mb_{q-1}\right)\left(Pa_{q-2}-Mb_{q-2}\right)}{(Pa_{q-1}-M\ _{q-1})^2-Nb^2_{q-1}}.$$

Posons :

$$A_q=(-1)^q\left\{Nb_{q-1}b_{q-2}-(Pa_{q-1}-Mb_{q-1})(Pa_{q-2}-Mb_{q-2})\right\},$$

$$B_q=(-1)^q\left\{(Pa_{q-1}-Mb_{q-1})^2-Nb^2_{q-1}\right\};$$

on aura enfin :

$$Y_q=\frac{A_q+P\sqrt{N}}{B_q},$$

A_q et B_q étant entiers.

Mais on a toujours :

$$\frac{a_{q-1}}{b_{q-1}} \gtrless x, \text{ suivant que } q \text{ est pair ou impair.}$$

En désignant par Z_q, V_q, V'_q, trois fractions de l'unité, on pourra donc écrire les égalités suivantes :

$$3) \qquad \frac{M+\sqrt{N}}{P} = \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}} - \frac{Z_q(-1)^q}{b^2_{q-1}},$$

$$\frac{M+\sqrt{N}}{P} = \frac{a_{q-1}}{b_{q-1}} - \frac{V_q(-1)^q}{b_{q-1}\,b_{q-2}},$$

$$\frac{M+\sqrt{N}}{P} = \frac{a_{q-2}}{b_{q-2}} + \frac{V'_q(-1)^q}{b_{q-1}\,b_{q-2}},$$

dans lesquelles $\qquad V_q + V'_q = 1$,

d'où l'on tire les relations suivantes

$$Pa_{q-1} - Mb_{q-1} = b_{q-1}\sqrt{N} + \frac{PZ_q(-1)^q}{b_{q-1}},$$

$$Pa_{q-1} - Mb_{q-1} = b_{q-1}\sqrt{N} + \frac{PV_q(-1)^q}{b_{q-2}},$$

$$Pa_{q-2} - Mb_{q-2} = b_{q-2}\sqrt{N} - \frac{PV'_q(-1)^q}{b_{q-1}}.$$

Substituant ces valeurs dans celles de A_q et de B_q, on trouve

$$A_q = P\left((V'_q - V_q)\sqrt{N} + \frac{PV_qV'_q(-1)^q}{b_{q-1}\,b_{q-2}}\right) < P(\sqrt{N}+P),$$

$$B_q = PZ_q\left(2\sqrt{N} + \frac{PZ_q(-1)^q}{b^2_{q-1}}\right) < P(2\sqrt{N}+P).$$

Ces deux expressions font voir clairement que les nombres A_q et B_q sont nécessairement limités. La reproduction des valeurs de Y_q, à mesure que q augmente, est donc inévitable. Or, si l'on désigne par s la valeur de q qui donne

$Y_q = Y_s$, cette égalité impliquera nécessairement les suivantes :

$$(4) \qquad \lambda_q = \lambda_s, \quad \lambda_{q+1} = \lambda_{s+1}, \quad \lambda_{q+2} = \lambda_{s+2}, \text{ etc.}$$

Il est donc ainsi démontré que toute expression de la forme $\frac{M + \sqrt{N}}{P}$ se développe en une fraction continue périodique (*V.* tome Ier, p. 1).