NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Note sur l'analyse indéterminée du premier degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 97-101

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__97_0>

NOTE
SUR
L'ANALYSE INDÉTERMINEE DU PREMIER DEGRE.

PAR E. CATALAN,
Répetiteur à l'Ecole polytechnique

—

J'ai donne, autrefois dans *le Geomètre* (*), et plus récemment dans le *Cours de Mathématiques* de M. *Blum*, un procede fort simple servant a trouver *une solution* de l'equation du premier degre a deux inconnues. D'apres la note de M *Chevillard*, inseree dans le tome II de ce journal, il paraît que le procede dont je parle est encore peu connu je me decide donc a le publier de nouveau. On me pardonnera d'avoir cherché a propager cet algorithme, si je declare, comme je l'ai deja fait il y a treize ans, qu'il avait ete indique depuis longtemps par M. *Pilatte*, dans les *Annales* de *Gergonne* (t II, p. 230 en 1812).

1 Soit, pour plus de regularite dans la notation, l'equation

$$ay + bx = A, \qquad (1)$$

nous supposerons a, b, A entiers, a et b premiers entre eux, et $b < a$.

On deduit, de cette equation, $x = \frac{A - ay}{b}$, ou, en appelant Q, q, B, c les quotients et les restes que fournissent A et a divises par b,

$$x = Q - qy + \frac{B - cy}{b}.$$

(*) P 177 Ce recueil hebdomadaire publie en 1836, par M Guillard, ancien professeur au College Louis-le-Grand, a cessé de paraître, *pour defaut de timbre*, la même annee
Le tome premier s arrête a la page 224 Tm

Nous voulons que x et y soient entiers : nous devons donc attribuer à y une valeur qui rende entière la quantité $\frac{B - cy}{b}$. Autrement dit, la résolution de l'équation (1) est ramenée à la resolution, en nombres entiers, de

$$\frac{B - cy}{b} = z,$$

ou de

$$bz + cy = B, \tag{2}$$

laquelle est plus simple que la proposée, car le coefficient c, reste de la division de a par b, est moindre que b.

Resolvons l'équation (2) par rapport à l'inconnue qui a le plus petit coefficient ; nous aurons

$$y = \frac{B - bz}{c} = Q' - q'z + \frac{C - dz}{c},$$

en representant par Q' et q' les quotients entiers de B et b par c et par C, d les restes correspondants Répétant le raisonnement ci-dessus, nous verrons que z doit rendre entière la quantité $\frac{C - dz}{c}$, ou que l'equation (2) se reduit a celle-ci

$$cy + dz = C, \tag{3}$$

dans laquelle les coefficients c et d sont respectivement moindres que b et c. A son tour, cette derniere equation en entraîne une plus simple qu'elle, et ainsi de suite.

2. Observons actuellement que les coefficients c, d, e, . . sont les restes successifs que fournirait l'opération du plus grand commun diviseur effectuée sur a et b. Car c est le reste de la division de a par b, de même, d est le reste de la division de b par c ; etc. Par hypothèse, a et b sont premiers entre eux, donc l'opération dont il s'agit conduira nécessairement à un dernier reste égal à l'unité Ainsi la résolution

de l'équation (1) se réduira, en dernier lieu, à celle d'une équation de cette forme

$$u + gv = G,$$

c'est-à-dire dans laquelle le coefficient de l'une des deux inconnues sera l'unité. Or si l'on attribue à v une valeur entière quelconque, il en résultera pour u une valeur entière ; et, en remontant successivement, on finira par déterminer les valeurs entières correspondantes de x et de y.

3. On peut donner au calcul une marche régulière qui le simplifie considérablement.

Supposons

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{A - ay}{b},\quad y = \dfrac{B - bz}{c},\quad z = \dfrac{C - cr}{d},\quad r = \dfrac{D - ds}{e}, \\[2ex] s = \dfrac{E - et}{f},\quad t = \dfrac{F - fu}{g},\quad u = \dfrac{G - gv}{h},\ \ldots \end{array}\right\} (4)$$

Dans ces expressions, les quantités c, d, e, f.... sont, ainsi que nous l'avons déjà dit, les restes successifs fournis par la recherche du plus grand commun diviseur entre a et b · admettons, pour fixer les idées, que le dernier de ces restes, égal à l'unité, soit h.

Relativement aux quantités B, C, D,.... la loi de composition est fort simple : B est le reste de la division de A par b ; C est le reste de la division de B par c ; etc.

Le calcul de ces divers coefficients s'effectue comme l'indique le tableau ci-après

a	b	c	d	e	f	g	1
A	B	C	D	E	F	G	0

La ligne supérieure se forme comme dans l'opération du plus grand commun diviseur. Pour former la seconde ligne, on écrit A sous a, puis l'on divise ce premier terme par b ; on obtient ainsi un reste B, que l'on écrit au-dessous de b ; etc. En général : *chaque terme de la ligne inférieure est le reste de* *la division du terme placé à gauche, par le terme placé au-dessus.* Il est visible que le dernier terme, correspondant au diviseur 1, est 0.

Ces deux lignes étant calculées, on détermine les inconnues u, t, s, r, z, y, x en fonction de v, à l'aide des équations (4); c'est-à-dire que :

Chaque inconnue s'obtient en retranchant d'un terme de la seconde ligne, le produit du nombre écrit au-dessus par l'inconnue qu'on vient de déterminer, et divisant le reste par le terme écrit à la droite de ce nombre.

4. Comme application des règles précédentes, prenons l'équation

$$89x + 162y = 209.$$

162	89	73	16	9	7	2	1
209	31	31	15	6	6	0	0

D'abord, 162 divisé par 89 donne pour reste 73; 89 divisé par 73 donne pour reste 16; etc.

Ensuite, 209 divisé par 89 donne 31 pour reste; 31 divisé par 73 donne encore 31; etc.

Les deux lignes étant formées, nous aurons, en prenant $v = 0$:

$$u = \frac{0-2\times 0}{1} = 0,\quad t = \frac{6-7\times 0}{2} = 3,\quad s = \frac{6-9\times 3}{7} = -3,$$

$$r = \frac{15+16\times 3}{9} = 7,\quad z = \frac{31-73\times 7}{16} = -30,$$

$$y = \frac{31+89\times 30}{73} = 37,\quad x = \frac{209-162\times 37}{89} = -65.$$

L'équation est donc satisfaite par $x = -65$, $y = 37$; d'où, en général,

$$x = -65 + 162\theta,\quad y = 37 - 89\theta.$$

Soit encore l'équation

$$29x - 47y = 112.$$

Elle donne

-47	29	-18	11	-7	4	-3	1
112	25	7	7	0	0	0	0

Puis,

$$\frac{0+3\times 0}{1}=0,\quad \frac{0-4\times 0}{-3}=0,\quad \frac{0+7\times 0}{4}=0,\quad \frac{7-11\times 0}{-7}=-1,$$

$$\frac{7-18\times 1}{11}=-1,\quad \frac{25+29\times 1}{-18}=-3,\quad \frac{112-47\times 3}{29}=-1\,;$$

donc

$$x=-1+49\theta,\quad y=-3+29\theta.$$

On peut observer, d'après ce dernier exemple, que si la ligne inférieure est terminée par une suite de zéros, il est bon de commencer le calcul des inconnues à partir du terme qui précède le dernier zéro.