Nouvelles annales de mathématiques

Ossian Bonnet

Quadrature de la courbe représentée par l'équation $y^2 = x^3 - x^4$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 75-76

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__75_1>

QUADRATURE DE LA COURBE REPRÉSENTÉE PAR L'ÉQUATION

$$y^2 = x^3 - x^4.$$

PAR M. OSSIAN BONNET.

On peut aisément construire et discuter la courbe dont il s'agit. On reconnaît ainsi qu'elle est symétrique par rapport aux axes, qu'elle est comprise entre l'axe des y et une parallèle à cet axe menée à la distance 1, que son point le plus haut a pour coordonnées $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{3\sqrt{3}}{16}$, qu'elle est tangente à la parallèle à l'axe des y menée à la distance 1, qu'elle a un point de rebroussement de première espèce à l'origine, qu'elle a une inflexion au point $x = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$, $y = \frac{1}{8}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$, etc.

Je me contenterai de faire remarquer une propriété qui conduit d'une manière élémentaire à la quadrature de la courbe.

Considérons le cercle représenté par l'équation

$$Y^2 = x - x^2$$

et retranchons d'une ordonnée positive quelconque de ce cercle l'ordonnée positive correspondante à la même abscisse de la courbe proposée, il viendra

$$Y - y = (1 - x)\sqrt{x(1-x)}$$

Or, le second membre n'est autre chose que la valeur de l'ordonnée de la courbe correspondante à l'abscisse $1 - x$; on conclut de là, par la méthode des infiniment petits, que l'espace compris entre l'axe des x et la partie de la courbe située au-dessus de cet axe est égal à l'espace compris entre cette même partie de la courbe et la demi-circonférence placée au-dessus, et par conséquent que l'aire de la courbe est moitié de celle du cercle, ou $\frac{\pi}{8}$.