OSSIAN BONNET

Questions sur les maxima et les minima

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 64-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__64_1>

QUESTIONS

SUR LES MAXIMA ET LES MINIMA,

PAR M. OSSIAN BONNET.

(Suite.)

IV.

PR. *Trouver dans la parabole la normale qui intercepte la plus petite aire.*

Sol. Soit $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole donnée. Désignons par $-m$ la tangente de l'angle que la normale cherchée fait avec l'axe des x ; l'équation de cette normale sera

$$y = -mx + \frac{p}{2}(m^3 + 2m),$$

et les points où elle rencontre rectangulairement et obliquement la courbe auront respectivement pour coordonnées

$$x' = \frac{pm^2}{2}, \quad y' = pm, \quad x'' = \frac{p}{2}\left(\frac{m^2+2}{m}\right), \quad y'' = -p\,\frac{m^2+2}{m};$$

on en déduit aisément l'aire interceptée par la normale

$$S = \frac{p^2m^3}{3} + \frac{p^2m}{2} + \frac{p^2(m^2+2)^3}{3m^3} - \frac{p(m^2+2)}{2m}\left(\frac{p}{2}\,\frac{(m^2+2)^2}{m^2} - p - \frac{pm^2}{2}\right),$$

ou en simplifiant

$$S = \frac{2}{3}p^2\left(\frac{m^2+1}{m}\right)^3 = \frac{2}{3}p^2 \cdot \left(\frac{m^2+1}{(m^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^3.$$

Maintenant, d'après le théorème du § I, le minimum de cette aire aura lieu quand

$$m^2 + 1 = 2m^2, \quad \text{d'où} \quad m = \pm 1.$$

Ainsi la normale cherchée fait un angle de 45° avec l'axe des x ; pour cette normale, on a

$$x' = \frac{p}{2}, \; y' = \pm p, \; x'' = \frac{9p}{2}, \; y'' = \mp 3p, \; S = \frac{16}{3}p^2, \text{ etc.}$$

Si on calcule la portion de la normale comprise dans la courbe et le rayon de courbure correspondant au point x', y', on trouve successivement

$$\delta = 4p\sqrt{2}, \quad \rho = 2p\sqrt{2};$$

ce qui fait voir que la partie de la normale comprise dans la courbe est divisée en deux parties égales par son point de rencontre avec la développée ; on verrait aussi sans peine que si, par ce point de rencontre, on mène une parallèle à l'axe des x, on divise l'aire interceptée par la normale en deux parties égales, etc.

V.

Pr. *Trouver dans l'ellipse la normale qui intercepte la plus grande et par conséquent la plus petite aire.*

Sol. Soit $y^2 + b^2x^2 = b^2$ l'équation de l'ellipse proposée (nous faisons pour simplifier $a = 1$), et m la tangente de l'angle que la normale cherchée fait avec l'axe des x, l'équation de cette normale sera

$$y = mx - \frac{c^2m}{\sqrt{1+b^2m^2}},$$

et les points où elle rencontre rectangulairement et obliquement la courbe auront respectivement pour coordonnées

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+b^2m^2}}, \quad y' = \frac{b^2m}{\sqrt{1+b^2m^2}},$$

$$x'' = \frac{(1-2b^2)m^2 - b^2}{(m^2+b^2)\sqrt{1+b^2m^2}}, \quad y'' = -\frac{(2-b^2+m^2)\,b^2m}{(m^2+b^2)\sqrt{1+b^2m^2}}.$$

D'ailleurs l'aire interceptée par la normale

$$S = \frac{\pi ab}{2} \pm \left[\int_0^{x'} y'dx' - \int_0^{x''} y''dx'' - \frac{b^2x'y'}{2} - \frac{y''}{2}(c^2x' - x'')\right].$$

Pour que cette aire soit maximum ou minimum, il faut que sa différentielle soit nulle ce qui donne

$$2y'dx' - 2y''dx'' - b^2x'dy' - b^2y'dx' - c^2x'dy'' + \\ + x''dy'' - c^2y''dx' + y''dx'' = 0,$$

ou

$$y'dx' - x'dy' + x''dy'' - y''dx'' + \\ + c^2(y'dx' + x'dy' - x'dy'' - y''dx') = 0,$$

ou

$$-x'^2d.\frac{y'}{x'} + x''^2d.\frac{y''}{x''} + c^2d.x'(y' - y'') = 0,$$

d'où, en vertu des valeurs de x', y', x'', y'' écrites ci-dessus

$$-\frac{1}{1+b^2m^2}+\frac{(2b^2-1)m^4+2m^2(b^4-b^2+1)+b^2(2-b^2)}{(m^2+b^2)^2(1+b^2m^2)}-$$

$$-2c^2\,\frac{b^2m^6-(b^4-3b^2+1)m^4+(b^4-3b^2+1)m^2-b^2}{(m^2+b^2)^2(1+b^2m^2)^2}=0,$$

d'où $$m^6+m^4-m^2-1=0.$$

Cette équation donne ± 1 pour valeurs admissibles de m.

Cela nous montre que dans l'ellipse comme dans la parabole la normale qui intercepte la plus petite aire fait un angle de 45° avec l'axe des x ; pour cette normale on a

$$x'=\frac{1}{\sqrt{1+b^2}},\quad y'=\pm\frac{b^2}{\sqrt{1+b^2}},\ \text{etc.},$$

la valeur de S n'offre rien de remarquable. Si on calcule la portion de la normale comprise dans la courbe et le rayon de courbure correspondant au point x', y', on trouve la portion de la normale double du rayon de courbure; ce qui montre que la portion de la normale comprise dans la courbure est divisée en deux parties égales par son point de rencontre avec la développée, etc.

VI.

Pr. *Déterminer dans la parabole la normale qui intercepte le plus petit arc.*

Sol. Soit $y^2=2px$ l'équation de la parabole. Considérons une de ses normales, et soient x', y' ; x'', $-y''$, les coordonnées des points où elle rencontre rectangulairement et obliquement la courbe. Soit enfin S l'arc intercepté sur la courbe, nous aurons

$$y'^2=2px',\quad y''^2=2px'',\quad y'+y''=-\frac{y'}{p}(x'-x''),$$

$$pS=\int_0^{y'}\sqrt{p^2+y'^2}\,dy'+\int_0^{y''}\sqrt{p^2+y''^2}\,dy''.$$

Des deux premières équations on tire

$$x' - x'' = \frac{y'^2 - y''^2}{2p},$$

et portant dans la troisième

$$2p^2 = y'(y'' - y'). \qquad (1)$$

Maintenant pour que S soit minimum, il faut que sa différentielle soit nulle, ce qui donne

$$\sqrt{p^2 + y'^2}\,dy' + \sqrt{p^2 + y''^2}\,dy'' = 0, \qquad (2)$$

mais de l'équation (1) on tire

$$0 = dy'(y'' - y') + y'(dy'' - dy'), \quad \text{d'où} \quad dy' = \frac{y'dy''}{2y' - y''},$$

portant dans (2) et supprimant dy'', il vient

$$y'\sqrt{y'^2 + p^2} + (2y' - y'')\sqrt{p^2 + y''^2} = 0,$$

éliminant y'' entre cette équation et l'équation (1), on trouve

$$3y'^4 - p^2y'^2 - 4p^4 = 0,$$

d'où

$$y'^2 = \frac{4p^2}{3} \text{ et } y' = \pm\frac{2p}{\sqrt{3}}, \; x' = \frac{2}{3}p, \; y'' = \pm\frac{5p}{\sqrt{3}} \; x'' = \frac{25}{6}p.$$

La valeur de S n'offre rien de remarquable. Si on calcule la portion de la normale comprise dans la courbe et le rayon de courbure correspondant au point x', y', on trouve successivement

$$\delta = \frac{7}{2}p\sqrt{\frac{7}{3}} \qquad \rho = \frac{7}{3}p\sqrt{\frac{7}{3}},$$

ce qui montre que la portion de la normale comprise dans la courbe est divisée par son point de rencontre avec la développée dans le rapport de 2 à 1, etc.

VII.

Pr. *Déterminer dans l'ellipse la normale à laquelle correspond le plus petit arc.*

Sol. Soit toujours $y^2+b^2x^2=b^2$ l'équation de l'ellipse donnée, et m la tangente de l'angle que la normale cherchée fait avec l'axe des x, de sorte que

$$y=mx-\frac{c^2m}{\sqrt{1+b^2m^2}}$$

soit l'équation de cette normale, et

$$(1)\qquad x'=\frac{1}{\sqrt{1+b^2m^2}},\qquad y'=\frac{b^2m}{\sqrt{1+b^2m^2}},$$

$$x''=\frac{(1-2b^2)m^2-b^2}{(m^2+b^2)\sqrt{1+b^2m^2}},\qquad y''=-\frac{(2-b^2+m^2)b^2m}{(m^2+b^2)\sqrt{1+b^2m^2}}$$

les coordonnées des points où elle rencontre rectangulairement et obliquement la courbe; nous devons avoir

$$\int_0^{x'}\sqrt{dx'^2+dy'^2}+\int_0^{x''}\sqrt{dx''^2+dy''^2}=\text{max. ou min.},$$

ce qui exige que la différentielle du premier membre soit nulle, ou que

$$\sqrt{dx'^2+dy'^2}+\sqrt{dx''^2+dy''^2}=0,$$

d'où
$$dx'^2+dy'^2=dx''^2+dy''^2,$$

d'où $(dx'+dx'')\,(dx'-dx'')+(dy'+dy'')\,(dy'-dy'')=0$,

ou $d(x'+x'')\,d(x'-x'')+d(y'+y'')\,d(y'-y'')=0$,

substituant à $x'+x''$, $x'-x''$, $y'+y''$, $y'-y''$ les valeurs que l'on déduit des équations (1), on trouve sans difficulté

$$(m^6-b^2m^4-2m^2)\left(b^2m^4+b^2(3-b^2)m^2+b^4-2b^2+2\right)$$
$$+(2b^2m^4+m^2-b^2)\left\{(2b^4-2b^2+1)m^4+(3b^2-1)m^2+b^2\right\}=0,$$

ou en simplifiant et posant $m^2=u$

$$b^2u^5+b^2(4b^4-6b^2+5)u^4+(b^6+6b^4-8b^2+3)u^3-$$
$$-(3b^6-8b^4+6b^2+1)u^2-(5b^4-6b^2+4)u-b^4=0$$

Cette équation admet pour racine -1, supprimant cette racine, qui est évidemment étrangère, il vient

$$b^2u^4+2b^2(2b^4-3b^2+2)u^3-3(b^6-4b^4+4b^2-1)u^2-$$
$$-2(2b^4-3b^2+2)u-b^4=0,$$

équation du quatrième degré qu'il ne me paraît pas facile de résoudre. On peut reconnaître pourtant qu'elle n'a qu'une racine réelle positive, que cette racine n'est ni entière ni fractionnaire, et qu'enfin elle ne correspond pas comme l'indiquerait l'analogie de la parabole, à la normale dont la partie intérieure à la courbe est divisée par le point de contact avec la développée dans le rapport de 2 à 3.

VIII.

Pr. *Parmi tous les triangles de même périmètre et de même surface, trouver celui dans lequel la distance entre les centres de gravité du périmètre et de la surface est maximum, et celui dans lequel la même distance est minimum.*

Sol. Soient a, b, c les trois côtés du triangle cherché ; appelons x, y, et x', y' les coordonnées respectives des centres de gravité de la surface et du périmètre de ce triangle, prises par rapport à deux de ses côtés a et b, par exemple, que nous supposerons faisant entre eux un angle θ.

Il s'agira de trouver a, b, c de manière que

$$(1) \qquad \Delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+2(x-x')(y-y')\cos\theta$$

soit maximum ou minimum, sachant que ces variables vérifient les conditions

$$(2) \qquad a+b+c=2p,\ p(p-a)(p-b)(p-c)=S^2,$$
$$a>0,\ b>0,\ c>0,\ a<b+c,\ b<a+c,\ c<a+b,$$

où les constantes $2p$ et S, qui représentent respectivement le périmètre et la surface du triangle cherché, sont supposées telles que $27S^2 \leqq p^4$, afin que ce triangle soit possible.

On déduit aisément du principe des moments

$$x=\frac{a}{3},\ y=\frac{b}{3},\ x'=\frac{a(a+c)}{2(a+b+c)},\ y'=\frac{b(b+c)}{2(a+b+c)},$$

substituant ces valeurs dans l'égalité (1), il vient, en se rappelant que $\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

$$(3)\qquad \begin{aligned} 144p^2S^2 &= a^2(2b-a-c)^2+b^2(2a-b-c)^2+ \\ &\quad +(2b-a-c)(2a-b-c)(a^2+b^2-c^2) \\ &= a^2(2b-a-c)(b+a-2c)+ \\ &\quad +b^2(2c-a-b)(b+c-2a)+c^2(2a-b-c)(a+c-2b), \end{aligned}$$

posons

$$(4)\qquad a=\frac{2}{3}p+x \qquad b=\frac{2}{3}p+y, \qquad c=\frac{2}{3}p+z,$$

les équations de condition (2) remplaceront par

$$(5)\ x+y+z=0,\ p(xy+xz+yz)-3xyz=\frac{27S^2-p^4}{9p}=-3k^3,$$

$$x>-\frac{2}{3}p,\ y>-\frac{2}{3}p,\ z>-\frac{2}{3}p$$

$$x<\frac{1}{3}p,\quad y<\frac{1}{3}p,\quad z<\frac{1}{3}p;$$

et l'equation (3) deviendra

$$\begin{aligned} 144p^2\Delta^2 &= -(2p+3x)^2yz-(2p+3y)^2zx-(2p+3z)^2xy= \\ &= -4p^2(xy+xz+yz)-36pxyz, \end{aligned}$$

d'où

$$36p\Delta^2=-p(xy+xz+yz)-9xyz,$$

d'où, en ajoutant la seconde des équations (5), multipliée par 3,

$$36p\Delta^2+9k^3=-4p(xy+xz+yz).$$

Cela nous fait voir que les valeurs maximum ou minimum de Δ^2 et de $-(xy+xz+yz)$ ont lieu en même temps. Ainsi considérons la fonction $-(xy+xz+yz)$. Posons

$$-(xy+xz+yz)=3m^2, \tag{6}$$

ce qui donne, d'après la seconde des équations (5),

$$xyz=k^3-pm^2;$$

l'équation dont les racines sont x, y, z sera

$$u^3-3m^2u+pm^2-k^3=0, \tag{7}$$

et comme d'après les six dernières des conditions (5) x, y, z doivent être compris entre $-\frac{2}{3}p$ et $\frac{p}{3}$, l'équation (7) devra avoir ses racines réelles et toutes les trois comprises entre $-\frac{2}{3}p$ et $\frac{p}{3}$; exprimons que cela a lieu, et nous connaîtrons les limites de m.

A cet effet, j'applique le théorème de M. Sturm à l'équation dont il s'agit, je trouve pour la suite

$$\begin{aligned}
U &= u^3-3m^2u+pm^2-k^3,\\
U_1 &= u^2-m^2,\\
U_2 &= 2m^2u-pm^2+k^3,\\
U_3 &= 4m^6-(pm^2-k^3)^2;
\end{aligned}$$

je fais maintenant dans cette suite successivement

$$u=-\frac{2p}{3},\quad u=\frac{p}{3},$$

ce qui me donne pour $u=-\frac{2p}{3}$:

$$-\frac{8p^3}{27}+3pm^2-k^3,\ \frac{4p^2}{9}-m^2,\ -\frac{7}{3}pm^2+k^3,\ 4m^6-(pm^2-k^3)^2$$

pour $u=\frac{p}{3}$:

$$\frac{p^3}{27}-k^3,\quad \frac{p^2}{9}-m^2,\quad -\frac{1}{3}pm^2+k^3,\quad 4m^6-(pm^2-k^3)^2.$$

La première suite ne doit présenter que des variations, et la seconde que des permanences; j'ai donc

$$3pm^2 < k^3 + \frac{8p^3}{27},\quad m^2 < \frac{4p^2}{9},\quad \frac{7}{3}pm^2 > k^3,$$

$$4m^6 - (pm^2 - k^3)^2 > 0,\quad m^2 < \frac{p^2}{9},\quad \frac{1}{3}pm^2 < k^3.$$

Je n'écris pas la relation $\frac{p^3}{27} - k^3 > 0$ qui est, on le voit aisément, une identité.

La seconde inégalité est inutile à cause de l'avant-dernière; la première et l'avant-dernière sont également inutiles à cause de la dernière; on peut donc ne considérer que les trois inégalités

$$m^2 > \frac{3k^3}{7p},\quad 4m^6 - (pm^2 - k^3)^2 > 0,\quad m^2 < \frac{3k^3}{p}. \tag{8}$$

la seconde de ces dernières peut se mettre sous une autre forme, elle revient d'abord à

$$(2m^3 - pm^2 + k^3)(2m^3 + pm^2 - k^3) > 0,$$

et puis à

$$(m^2 - \alpha^2)(m^2 - \alpha'^2)(m^2 - \alpha''^2) > 0, \tag{9}$$

en appelant α, α', α'', les racines de l'équation

$$2m^3 - pm^2 + k^3 = 0.$$

Je fais remarquer, maintenant, que les racines α, α', α'', sont toutes trois réelles, que deux sont positives et une négative, et qu'enfin la racine négative est en valeur absolue la plus petite des trois. En effet si l'on substitue à m dans $2m^2 - pm^2 + k^3$, successivement $-\infty$, 0, $\frac{p}{3}$, ∞, on ne trouve que des variations; cela fait voir déjà que les trois racines sont réelles et qu'il y en a deux positives et une négative; puis si α'' est la racine négative, le troisième terme manquant dans l'équation, on a

$$\alpha''(\alpha+\alpha')+\alpha\alpha'=0, \quad \text{ou} \quad -\alpha''=\frac{\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'},$$

d'où

$$-\alpha''-\alpha=-\frac{\alpha^2}{\alpha+\alpha'}, \quad \text{et} \quad -\alpha''-\alpha'=-\frac{\alpha'^2}{\alpha+\alpha'}.$$

Ce qui fait voir que α et α' sont plus grandes que la valeur absolue de α''.

Cela étant, si nous supposons $\alpha^2>\alpha'^2>\alpha''^2$, l'inégalité (9) revient à l'inégalité

$$m^2>\alpha^2, \qquad (10)$$

ou aux deux inégalités

$$m^2<\alpha'^2, \quad m^2>\alpha''^2. \qquad (11)$$

L'inégalité (10) est inadmissible, car m^2 doit être $<\frac{3k^3}{p}$ en vertu de la troisième des inégalités (8) et $\frac{3k^3}{p}$ est $<\alpha^2$, ainsi qu'on le reconnaît en substituant $\sqrt{\frac{3k^3}{p}}$ à m dans $2m^3-pm^2+k^3$; nous ne devons donc prendre que les deux inégalités (11). Je dis maintenant qu'à cause de ces deux dernières inégalités la première et la troisième des inégalités (8) sont inutiles; en effet si l'on substitue à m dans $2m^3-pm^2+k^3$ successivement $-\sqrt{\frac{3k^3}{7p}}$ et $\sqrt{\frac{3k^3}{p}}$, on trouve d'abord un résultat positif et puis un résultat négatif. Cela prouve que $-\sqrt{\frac{3k^3}{7p}}$ est $>\alpha''$, et que $\sqrt{\frac{3k^3}{p}}$ est $>\alpha'$, ou bien que $\frac{3k^3}{7p}$ est $<\alpha''^2$ et que $\frac{3k^3}{p}$ est $>\alpha'^2$, donc, etc. Ainsi nous n'avons, en définitive, qu'à satisfaire aux deux inégalités

$$m^2<\alpha'^2, \quad m^2>\alpha''^2.$$

Nous en conclurons que $m^2 = \alpha''^2$ est la plus petite valeur de m^2 et que $m^2 = \alpha'^2$ est la plus grande. Pour chacune de ces valeurs de m^2 l'équation (7) admet deux racines égales, donc pour les valeurs maximum et minimum de m^2 ou de Δ, deux des trois quantités x, y, z, et par conséquent deux des trois quantités a, b, c, sont égales, ainsi les triangles cherchés sont des triangles isocèles ; de plus comme dans le cas de $x=y$, on a $x^2 = m^2$ en vertu de l'équation (6) et de la première des relations (5), on voit que le triangle isocèle pour lequel Δ est maximum, est celui qui a le plus grand côté double, et que le triangle isocèle pour lequel Δ est minimum est celui qui a le plus petit côté double. (*La fin prochainement.*)